2011학년도 대수능 6월 모의평가 수리영역-나형 해설지

1.

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

$\log_3 81=\log_3 3^4=4$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81$

$=\dfrac{1}{2}\times 4$

$=2$

답 ②

2. $A+B=2E$에서 $B=2E-A$이므로

$A-B=A-(2E-A)$

$=2A-2E$

$=2\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$=2\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 4이다.

답 ④

3.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

$=3$

답 ③

4.

$\dfrac{16^x}{2}=2^{x+3}$ 에서

$(2^4)^x=2\cdot 2^{x+3}$

$2^{4x}=2^{x+4}$

$4x=x+4$

$\therefore\ x=\dfrac{4}{3}$

답 ④

5. $(f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)$

$=f(g(2))+g(h(2))$

$=f(4)+g(1)$

$=2^4+1=17$

답 ①

6. 첫째항이 1, 끝항이 2, 항의 개수가 $n+2$이므로

$\dfrac{(n+2)(1+2)}{2}=24$

$n+2=16$

$\therefore\ n=14$

답 ④

7.

$\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$에서

진수조건에서

$x^2+x-2>0$

$(x+2)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-2$ 또는 $x>1$ $\cdots$㉠

$-2x+2>0$

$\therefore\ x<1$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $x<-2$ $\cdots$㉢

주어진 로그부등식의 밑이 2이므로

$x^2+x-2<-2x+2$

$x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$

$\therefore\ -4<x<1$ $\cdots$㉣

㉢, ㉣에서

$-4<x<-2$

$\therefore\ \alpha=-4,\ \beta=-2$

$\therefore\ \alpha\beta=8$

답 ④

8.

직선 AB의 방정식은

$y-3=-(x-2)$

즉, $y=-x+5$

한편, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

직선 AB가 직선 $y=x$와 수직으로 만나므로

점 B의 좌표는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$\therefore\ B(3,\ 2)$

사각형 $ACDB$에서

$\overline{AC}=3$, $\overline{BD}=2$, $\overline{CD}=1$ 이므로

사각형 $ACDB$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3+2)\times1=\frac{5}{2}$

답 ①

9.

$t_1=10$ 일 때, $T_1=200$

$t_2=20$ 일 때, $T_2=202$ 이므로

$\kappa=C\times\frac{\log20-\log10}{202-200}=C\times\frac{\log2}{2}$

$\cdots$㉠

$t_3=x$일 때, $T_3=206$ 이므로

$\kappa=C\times\frac{\log x-\log20}{206-202}$

$=C\times\frac{\log x-\log20}{4}$ $\cdots$㉡

㉠,㉡에서

$\frac{\log x-\log20}{4}=\frac{\log2}{2}$

$\log x-\log20=2\log2$

$\log x=\log20+2\log2=\log80$

$\therefore\ x=80$

답 ②

10. 도형 R_1에서 색칠된 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면

$2x+\frac{1}{4}\times5=5$ $\therefore\ x=\frac{15}{8}$

또, 세로의 길이를 y라 하면

$2y+\frac{1}{5}\times4=4$ $\therefore\ y=\frac{8}{5}$

그러므로

$S_1=4\times\frac{15}{8}\times\frac{8}{5}=12$

한편, 색칠된 하나의 직사각형의 가로의 길

이, 세로의 길이는 각각 $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$인 등비수열을 이루고 직사각형의 개수는 공비가 4인 등비수열을 이룬다.

따라서, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 12, 공비가 $4\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}$ 즉, $\frac{3}{5}$인 등비수열을 이루므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{12}{1-\frac{3}{5}} = 30$$

답 ②

11. 역행렬을 갖지 않으므로

$t\times(t^2+t)-(t+1)\times 2t=0$

$t^3-t^2-2t=0$

$t(t^2-t-2)=0$

$t(t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$ 또는 $t=2$

따라서 모든 t의 값의 합은

$0+(-1)+2=1$

답 ①

12.

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}+7^n a_n=3^n-1$ …㉠

$7a_1+7^2a_2+\cdots+7^{n-1}a_{n-1}=3^{n-1}-1$ …㉡

㉠-㉡에서

$7^n a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{2\cdot 3^{n-1}}{7^n}$ $(n\geq 2)$

$n=1$일 때, $7a_1=3^1-1$ 에서

$a_1=\frac{2}{7}$ 이므로

$a_n=\frac{2\cdot 3^{n-1}}{7^n}$ $(n\geq 1)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n-1}}\times\frac{2\cdot 3^{n-1}}{7^n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{7^n}$$

$$=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

답 ①

13. $0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k}ma_m$

$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m+ka_k$

$=ka_{k+1}+(1-k)a_k+ka_k$

이므로

$ka_{k+1}=(k-1)a_k-ka_k=-a_k$

$\therefore\ a_{k+1}=-\frac{1}{k}a_k$

따라서 (가), (나)에 들어갈 식은 각각

$1-k$, $-\frac{1}{k}$

이므로

$f(k)=(1-k)(-\frac{1}{k})=1-\frac{1}{k}$

$\therefore\ f(10)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

답 ⑤

14.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면

행렬 $\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & -4\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서, $1\cdot(-4)-(-k)\cdot k=0$에서

$k^2=4$

$k=-2$ 또는 $k=2$

그러므로 모든 실수 k의 값의 합은 0이다.

답 ③

15.

$b_n=a_n$이므로

$a_{n+1}=a_n+b_n$

$\quad =2a_n$

또, $a_1=1$이므로

$a_n=2^{n-1}$

따라서,

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}2^{k-1}$$

$$=\frac{1\times(2^6-1)}{2-1}$$

$$=63$$

답 ③

16.

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하면

점 A_n의 좌표는 $(a_n,\ -a_n+2)$

점 B_n의 좌표는

$\left(-\frac{1}{4}(a_n+2),\ -a_n+2\right)$

점 C_n의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}(a_n+2),\ 0\right)$

따라서 점 P_{n+1}의 좌표는

$\left(\frac{1}{4}(a_n+2),\ 0\right)$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+2)$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(a_n+2)$에서

$\alpha=\frac{1}{4}(\alpha+2)$

$\therefore\ \alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

답 ⑤

17.

주어진 삼각형을 포함하는 사각형을 만들려면 점 $O(0,0)$을 반드시 꼭짓점으로 해야 한다.

점 O와 연결된 변의 꼭짓점은

$(4,\ 0),\ (8,\ 0)$ 중에서 한 개,

$(0,4),\ (0,\ 8)$ 중에서 한 개 선택하며,

점 O와 변으로 연결되지 않은 한 꼭짓점은

$(4,\ 4),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (8,\ 8)$ 중에서 한 개를 선택해야 한다.

따라서, 꼭짓점을 선택하는 방법의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_4C_1=16$ (개)

이 중에서 $(0,0),(8,0),(4,4),(0,8)$을 꼭짓점으로 선택하면 사각형을 만들 수 없다.
따라서, 구하는 사각형의 개수는

$16-1=15$(개)

답 ②

18. $a_2a_4=a_3^2=16$

$\therefore\ a_3=4\ (\because a_n>0)$

$a_3a_5=4a_5=64$

$\therefore\ a_5=16$

따라서 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_5=a_3r^2=4r^2=16$

$r^2=4$

$\therefore\ r=2$

$\therefore\ a_7=a_5r^2=16\times2^2=64$

답 64

19. 일반항은

${}_6C_r\left(\frac{x}{2}\right)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_6C_r2^{-6+2r}x^{6-2r}$

(단, $r=0,1,2,3,4,5,6$)

따라서 상수항은 $6-2r=0$에서 $r=3$일 때이므로

${}_6C_32^{-6+6}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

답 20

20. $2A^2-A=2E$ 에서

$(2A-E)A=2E$

$(2A-E)\left(\frac{1}{2}A\right)=E$

$\therefore\ (2A-E)^{-1}=\frac{1}{2}A$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합이 24이므로 행렬 $2A-E$의 역행렬의 모든 성분의 합은

$24\times\frac{1}{2}=12$

답 12

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(3^na_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(3^na_n-2)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}3^na_n=2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\cdot4^{-n}}{a_n+3^{-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot3^na_n+5\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^na_n+1}$

$=\frac{6\times2}{2+1}=4$

답 4

22.

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$에서

$2^a=2+\sqrt{3}$

$4^a=(2^a)^2=(2+\sqrt{3})^2$

$=7+4\sqrt{3}$

$\therefore\ 4^a+\frac{4}{2^a}=7+4\sqrt{3}+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})$

$=15$

답 15

23

(ⅰ) A, B가 공통으로 가입한 동아리가 1개인 경우

공통으로 가입하는 동아리 1개를 선택하고 이를 제외한 3개의 동아리 중에서 A, B가 각각 하나씩 택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times 3 \times 2 = 24 \text{(가지)}$$

(ⅱ) A, B가 공통으로 가입한 동아리가 없는 경우

A가 2개의 동아리를 선택한 후 B가 나머지 중에 2개의 동아리를 선택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6 \text{(가지)}$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 6 = 30 \text{(가지)}$$

답 30

24.

n이 두 자리 자연수이므로

$\log n = 1 + \alpha$ ($0 \le \alpha < 1$) …㉠

로 놓을 수 있다.

$$\log \frac{1}{2} = -\log 2 = -1 + (1 - \log 2)$$

$$= -1 + \log 5$$

이므로 $\log \frac{1}{2}$ 의 가수는 $\log 5$ 이다.

$\log n$의 가수가 α이므로

문제의 조건에서 $\alpha < \log 5$

따라서, $0 \le \alpha < \log 5$ 이므로 ㉠에서

$1 \le \log n < 1 + \log 5$

$\log 10 \le \log n < \log 50$

$\therefore\ 10 \le n < 50$

따라서, 자연수 n의 개수는

$50 - 10 = 40$(개)

답 40

25.

$a_n = 16 \times \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{n-1} = 2^{\frac{1}{10}n + 4 - \frac{1}{10}}$ 이므로

$$\log a_n = \left(\frac{1}{10}n + 4 - \frac{1}{10}\right)\log 2$$

$$= \left(\frac{1}{10}n + 4 - \frac{1}{10}\right) \times 0.301$$

$$= 0.0301n + 1.204 - 0.0301$$

$$= 0.0301n + 1.1739$$

$$= 1 + (0.0301n + 0.1739)$$

$0.0301n + 0.1739 \ge 1$ 에서

$0.0301n \ge 0.8261$

$n \ge 27.4 \times\times\times$

따라서, $1 \le n \le 27$ 일 때,

$\log a_n$의 가수 b_n은

$b_n = 0.0301n + 0.1739$

이므로 수열

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{27}$

은 공차가 0.0301 인 등차수열을 이룬다.

$b_{28} = 0.0301 \times 28 + 0.1739 - 1$ 이므로

$b_{28} + 1 = 0.0301 \times 28 + 0.1739$

$b_{29} = 0.0301 \times 29 + 0.1739 - 1$ 이므로

$b_{29} + 1 = 0.0301 \times 29 + 0.1739$

따라서, 수열

$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{27},\ b_{28}+1,\ b_{29}+1$

은 공차가 0.0301인 등차수열을 이룬다.
그러므로 수열

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_k,\ b_{k+1}+1$

이 등차수열을 이루는 k의 값은
27이다.

답 27

2 6 .

$$AB=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -10\\4 & 6 & 20\end{pmatrix}$$

이므로 행렬 AB의 모든 성분의 합은
15이다.

답 ③

27. 곡선 $y=a^{-x-2}$가 직선 $y=1$과 만나는 점
A의 좌표를 A(t, 1)이라 하면
$1=a^{-t-2}$ 에서 $a>1$ 이므로 $-t-2=0$ 이다.

$\therefore\ t=-2$

또 곡선 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나 는 점 B의 좌표를 B(k, 1)이라 하면

$1=\log_a(k-2),\ k-2=a$

$\therefore\ k=a+2$

따라서

$\overline{AB}=\sqrt{\{a+2-(-2)\}^2+(1-1)^2}$

$=(a+4)=8$

이므로 $a=4$ 이다.

답 ②

28. A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사에
발령이 나야하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각한다.

(i) A가 '가'지사에 발령 나는 경우
'나' 지사에 나머지 사람을 발령하는 경우의 수는 B를 제외한 3가지이므로
각 지사에 발령하는 경우의 수는
$3\times3\times2\times1=18$

(ii) A가 '나'지사에 발령 나는 경우
'가' 지사에 나머지 사람을 발령하는 경우의 수는 B를 제외한 3가지이므로
각 지사에 발령하는 경우의 수는
$3\times3\times2\times1=18$

(iii) A가 '가', '나'지사 이외의 곳에 발령 나 는 경우
'가', '나'지사에 나머지 사람을 발령하는 경우의 수는 ${}_3P_2$ 이고 나머지의 곳에
A, B를 포함하여 세 명을 발령하는 경우 의 수는 3가지뿐이므로 구하는 경우의 수 는 ${}_3P_2\times3=18$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 경우의 수는 $18+18+18=54$ (가지)이다.

답 ③

29. ㄱ. $A=P\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}P^{-1}$

$B=P\begin{pmatrix}c & 0\\0 & d\end{pmatrix}P^{-1}$

이므로 $a=c,\ b=d$ 이면 $A=B$ 이다. (참)

ㄴ. $AB = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} P^{-1}$

$BA = P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} P^{-1}$

$\therefore\ AB = BA$ (참)

ㄷ .

$A - B = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1} - P\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$

$= P\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\right] P^{-1}$

$= P\begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b-d \end{pmatrix} P^{-1}$

에서 $A - B$의 역행렬이 존재하므로

$(a-c)(b-d) \neq 0$ 이다.

따라서 $a \neq c$ 이고 $b \neq d$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

답 ⑤

30. 각 자리의 숫자의 합이 5인 다섯 자리 자연수 중에서

0을 한 개도 사용하지 않고

만든 숫자는 11111 한 가지 뿐이다.

0을 한 개 사용하여 만든 숫자는

0, 1, 1, 1, 2 로 이루어져 있으므로

(i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 1, 2를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{2!} = 12$(가지)

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

나머지 숫자 0, 1, 1, 1을 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{4!}{3!} = 4$(가지)

따라서 구하는 모든 자연수의 개수는

17 가지이다.

답 17