2011학년도 대수능 6월 모의평가 수리영역-가형 해설지

1.

$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

$\log_3 81=\log_3 3^4=4$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\times\log_3 81$

$=\dfrac{1}{2}\times 4$

$=2$

답 ②

2. $A+B=2E$에서 $B=2E-A$이므로

$A-B=A-(2E-A)$

$=2A-2E$

$=2\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$=2\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 4이다.

답 ④

3.

$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=14$ 에서

$x\to 3$ 일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 3}(x^2+ax+b)=9+3a+b=0$

$\therefore\ b=-3(a+3)$

[1] $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax-3(a+3)}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+a+3)}{x-3}$

$=6+a=14$

$\therefore\ a=8,\ b=-33$

$\therefore\ a+b=-25$

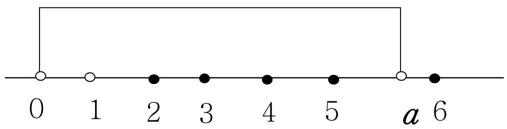
답 ①

4. $x(x-a)(x-1)^2<0$ 에서

$(x-1)^2\geq 0$ 이므로

$x(x-a)<0,\ x\neq 1\cdots$㉠

따라서 ㉠을 만족하는 자연수의 개수가 4개이므로 다음과 같아야 한다.



$\therefore\ 5<a\leq 6$

따라서 실수 a의 최댓값은 6이다.

답 ④

5. $f(x)$의 이차항의 계수를 $a(a>0)$라고 하면

$f(x)=a(x-2)(x+2)$

$\dfrac{f(x+1)}{f(x-1)}\leq 1$ $\Leftrightarrow$

$\dfrac{a(x-1)(x+3)}{a(x-3)(x+1)}\leq 1$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}\leq 1$

$\Leftrightarrow$

---

1)

$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}-1\le 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x}{(x-3)(x+1)}\le 0$$

따라서

$x(x+1)(x-3)\le 0$, $x\ne -1, x\ne 3$

이므로

$A=\{x|x<-1$ 또는 $0\le x<3\}$

$\therefore A\cap B$

$=\{x|-5<x<-1$ 또는 $0\le x<3\}$

따라서 집합 $A\cap B$의 원소 중에서 정수인 것은 -4, -3, -2, 0, 1, 2의 6개이다.

답 ③

6.

$xoverx-1+x-2overx+1=\frac{ax+5}{x^2-1}$

의 양변에 x^2-1을 곱하면

$x(x+1)+(x-2)(x-1)=ax+5$

$2x^2-(2+a)x-3=0$ …㉠

의 판별식 D가

$D=(2+a)^2-4\cdot 2\cdot(-3)$

$=a^2+4a+8=(a+2)^2+4>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. 그런데 이 방정식이 오직 하나의 실근을 가지므로 ㉠은 무연근 $x=1$ 또는 $x=-1$을 근을 가져야 한다.

(i) $x=1$일 때, $2-(2+a)-3=0$

$\therefore a=-3$

(ii) $x=-1$일 때, $2+(2+a)-3=0$

$\therefore a=-1$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$(-3)\times(-1)=3$

답 ①

7.

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\frac{t-1}{t+1}$로 놓으면

$s=1+\frac{-2}{t+1}$

이므로 $t\to\infty$일 때, $s\to 1-0$

$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to 1-0} f(s)=2$ ----㉠

또, $\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $s=\frac{4t-1}{t+1}$로 놓으면

$s=4+\frac{-5}{t+1}$

이므로 $t\to-\infty$일 때, $s\to 4+0$

$\therefore \lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{s\to 4+0} f(s)=3$ ---㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$

$=2+3=5$

답 ③

8.

직선 AB의 방정식은

$y-3=-(x-2)$

즉, $y=-x+5$

한편, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$ 은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

직선 AB가 직선 $y=x$와 수직으로 만나므로

점 B의 좌표는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$\therefore\ B(3, 2)$

사각형 $ACDB$에서

$\overline{AC}=3$, $\overline{BD}=2$, $\overline{CD}=1$ 이므로

사각형 $ACDB$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(3+2)\times1=\frac{5}{2}$

답 ①

9.

$t_1=10$ 일 때, $T_1=200$

$t_2=20$ 일 때, $T_2=202$ 이므로

$\kappa=C\times\frac{\log20-\log10}{202-200}=C\times\frac{\log2}{2}$

…㉠

$t_3=x$일 때, $T_3=206$ 이므로

$\kappa=C\times\frac{\log x-\log20}{206-202}$

$=C\times\frac{\log x-\log20}{4}$ …㉡

㉠,㉡에서

$\frac{\log x-\log20}{4}=\frac{\log2}{2}$

$\log x-\log20=2\log2$

$\log x=\log20+2\log2=\log80$

$\therefore\ x=80$

답 ②

10. 도형 R_1에서 색칠된 직사각형의 가로의 길이를 x라 하면

$2x+\frac{1}{4}\times5=5\ \ \therefore\ x=\frac{15}{8}$

또, 세로의 길이를 y라 하면

$2y+\frac{1}{5}\times4=4\ \ \therefore\ y=\frac{8}{5}$

그러므로

$S_1=4\times\frac{15}{8}\times\frac{8}{5}=12$

한편, 색칠된 하나의 직사각형의 가로의 길이, 세로의 길이는 각각 $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$인 등비수열을 이루고 직사각형의 개수는 공비가 4인 등비수열을 이룬다.

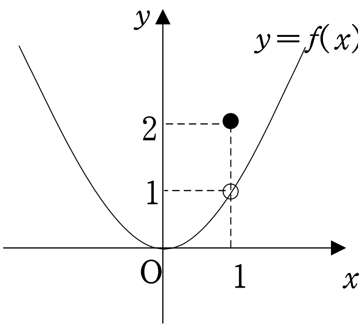
따라서, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 12, 공비가 $4\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}$ 즉, $\frac{3}{5}$인 등비수열을 이루므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{12}{1-\frac{3}{5}}=30$$

답 ②

11.

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=1=\lim_{x\to 1+0} f(x)$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x-a)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $g(x)$가 실수전체의 집합에서 연속인 실수 a는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $y=x-1$이 실수 전체의 집합에서 연속이고, $y=f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로 $h(x)=(x-1)f(x)$가 $x=1$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1-0} h(x)=\lim_{x\to 1-0}(x-1)x^2$$
$$=\lim_{x\to 1-0}(x^3-x^2)=0$$
$$\lim_{x\to 1+0} h(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-1)x^2$$
$$=\lim_{x\to 1+0}(x^3-x^2)=0$$

이므로 $\lim_{x\to 1} h(x)=0$

$h(1)=(1-1)f(1)=0\times 2=0$

$\therefore \lim_{x\to 1} h(x)=h(1)$

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

12. ㄱ. $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$ 이므로 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다. (참)

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$ 이면

$f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$

이므로 ㄱ에 의하여 $f(x)$의 사차항의 계수를 k라 하면

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

또는

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)$

또는

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

으로 나타낼 수 있다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다. (참)

ㄷ .

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x^2+ax+b)$

라고 하면

$$f'(x)=k(x-\beta)(x^2+ax+b)$$
$$+k(x-\alpha)(x^2+ax+b)$$
$$+k(x-\alpha)(x-\beta)(2x+a)$$

$f'(\alpha)f'(\beta)$

$=\{k(\alpha-\beta)(\alpha^2+a\alpha+b)\}\times$

$\{k(\beta-\alpha)(\beta^2+a\beta+b)\}$

$=-k^2(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)>0$

$(\alpha^2+a\alpha+b)(\beta^2+a\beta+b)<0$

따라서 $g(x)=x^2+ax+b$라고 하면

$g(\alpha)g(\beta)<0$ 이므로 중간값의 정리에

의하여 구간 (α, β)에서 방정식 $g(x)=0$은 하나의 실근을 갖는다. 또한, $g(x)$는 이차함수이므로 다른 구간에서 또다른 하나의 실근을 갖는다.
즉, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

답 ⑤

13. $0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k} ma_m$

$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1} ma_m+ka_k$$

$$=ka_{k+1}+(1-k)a_k+ka_k$$

이므로

$ka_{k+1}=(k-1)a_k-ka_k=-a_k$

$\therefore\ a_{k+1}=-\frac{1}{k}a_k$

따라서 (가), (나)에 들어갈 식은 각각

$1-k,\ -\frac{1}{k}$

이므로

$f(k)=(1-k)(-\frac{1}{k})=1-\frac{1}{k}$

$\therefore\ f(10)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

답 ⑤

14.
주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 경우 즉, 시계방향으로 주사위를 주는 경우를 a, 주사위를 던져서 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 경우 즉, 반시계방향으로 주사위를 주는 경우를 b 라 하자.
5번 주사위를 던진 후에 B가 주사위를 가지려면 a가 3번, b가 2번 나오거나 b가 5번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{8}{27}$$

답 ③

15.
ㄱ. $g(x)=f(a)$에서 $b-a>0$이므로
$f(a)+(b-a)f'(x)=f(a)$
$(b-a)f'(x)=0$
$f'(x)=0$
이때, $y=f(x)$의 그래프는 극댓값과 극솟값을 을 가지므로 방정식 $f'(x)=0$은 실근을 갖는다. <참>
ㄴ .
$g(b)-f(a)=\{f(a)+(b-a)f'(b)\}-f(a)$
$=(b-a)f'(b)$
이때, $b-a>0$이고 $y=f(x)$가 감소하는 구간에서는 $f'(b)<0$이므로
$(b-a)f'(b)<0$
그러므로 $g(b)>f(a)$라고 할 수 없다. <거짓>
ㄷ .
$g(a)-f(b)=\{f(a)+(b-a)f'(a)\}-f(b)$

$$=(b-a)\left\{f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}$$

이때, $b-a>0$이고 점 $(a, f(a))$에서

의 접선의 기울기 $f'(a)$는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 잇는 직선의 기울기 보다 항상 크므로

$$f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$$

그러므로 $g(a)>f(b)$ <참>

답 ④

16.

ㄱ. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to+0}h(x)=\lim_{x\to-0}h(x)=h(0)$$

따라서, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}g(x)$에서

$f(0)=g(0)$ (참)

ㄴ. $f'(0)=g'(0)=k$라 하면

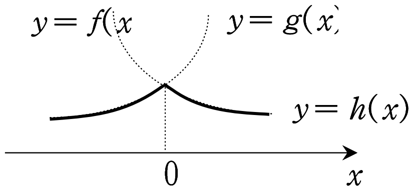
$$\lim_{x\to+0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=f'(0)=k$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$
$$=g'(0)=k$$

$\therefore\ h'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=k$ (참)

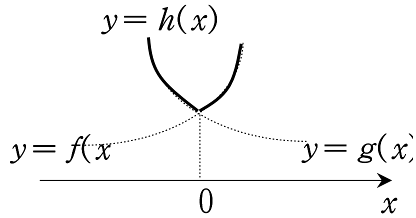
ㄷ. (i) $f'(0)<0$, $g'(0)>0$ 이면

$f(x)$는 $x=0$에서 감소상태, $g(x)$는 $x=0$에서 증가상태이고, $f(0)=g(0)$이므로 아래의 그림과 같이 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



(ii) $f'(0)>0$, $g'(0)<0$ 이면

$f(x)$는 $x=0$에서 증가상태, $g(x)$는 $x=0$에서 감소상태이고, $f(0)=g(0)$이므로 아래의 그림과 같이 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



따라서, $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

17.

주어진 삼각형을 포함하는 사각형을 만들려면 점 $O(0,0)$을 반드시 꼭짓점으로 해야 한다.

점 O와 연결된 변의 꼭짓점은

$(4,\ 0),(8,\ 0)$ 중에서 한 개,

$(0,4),(0,\ 8)$ 중에서 한 개 선택하며,

점 O와 변으로 연결되지 않은 한 꼭짓점은

$(4,4),(4,8),(8,4),(8,8)$ 중에서 한 개를 선택해야 한다.

따라서, 꼭짓점을 선택하는 방법의 수는

${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1 = 16$(개)

이 중에서

$(0,0),(8,0),(4,4),(0,8)$을 꼭짓점으로 선택하면 사각형을 만들 수 없다.

따라서, 구하는 사각형의 개수는

$16-1=15$(개)

답 ②

18.

$h=\dfrac{1}{n}$으로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}$$

$$=3\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+2\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}$$

$$=3f'(1)+2f'(1)$$

$$=5f'(1)$$

이때, $f'(x)=8x^3-3$이므로

$5f'(1)=5\times(8-3)=25$

답 25

19.

$\sqrt{x-1}=t$ ($t\geq 0$)라 하면

$t^3-6t=t^2$

$t^3-t^2-6t=0$

$t(t-3)(t+2)=0$

$\therefore\ t=0,\ t=3$ ($\because t\geq 0$)

$\sqrt{x-1}=0$에서 $x=1$

$\sqrt{x-1}=3$에서 $x=10$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$1+10=11$

답 11

20. $2A^2-A=2E$ 에서

$(2A-E)A=2E$

$(2A-E)(\frac{1}{2}A)=E$

$\therefore\ (2A-E)^{-1}=\frac{1}{2}A$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합이 24이므로 행렬 $2A-E$의 역행렬의 모든 성분의 합은

$24\times\frac{1}{2}=12$

답 12

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3^n a_n-2)$가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(3^n a_n-2)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}3^n a_n=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\cdot 4^{-n}}{a_n+3^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6\cdot 3^n a_n+5(\frac{3}{4})^n}{3^n a_n+1}$$

$$=\frac{6\times 2}{2+1}=4$$

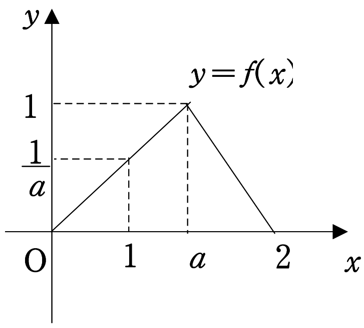
답 4

22.

실수 $a(1<a<2)$에 대하여 폐구간 $[0, 2]$에서 정의된 X의 확률밀도함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{a} & (0\le x\le a)\\ \dfrac{x-1}{a-2} & (a<x\le 2)\end{cases}$$

의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$P(1\le X\le 2)=1-P(0\le X\le 1)$$
$$=1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2a}=\frac{2}{5}$$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{4}$

$\therefore\ 100a=125$

답 125

23. (가)에서 $f(x)$의 최고차항을 ax^n $(a\ne 1)$이라 하면

$\{f(x)\}^2-f(x^2)$의 최고차항은

$a^2x^{2n}-ax^{2n}=a(a-1)x^{2n}$ ---㉠

또, $x^3f(x)$의 최고차항은

ax^{n+3} ----㉡

0이 아닌 극한값이 존재하려면 ㉠과 ㉡에서

$2n=n+3\quad\therefore\ n=3$

이때, 극한값이 4이므로

$$\frac{a(a-1)}{a}=4\quad\therefore\ a=5$$

$f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$로 놓으면

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

(나)에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{15x^2+2bx+c}{x}$$

이때, $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$$\lim_{x\to 0}(15x^2+2bx+c)=c=0$$

이 값을 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to 0}(15x+2b)=2b=4$$

$\therefore\ b=2$

따라서 $f'(x)=15x^2+4x$이므로

$f'(1)=15+4=19$

답 19

24.

(i) $8<x<9$ 일 때,

x보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로

$f(x)=4$

이 때, $2f(x)=8<x$이므로

$g(x)=f(x)=4$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{x\to 8+0}g(x)=\lim_{x\to 8+0}4=4$

$\therefore\ \alpha=4$

(ii) $7<x<8$ 일 때,

x보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로

$f(x)=4$

이 때, $2f(x)=8>x$ 이므로

$g(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to 8-0} g(x)=\lim_{x\to 8-0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore \beta=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$

답 16

25.

$a_n=16\times\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{n-1}=2^{\frac{1}{10}n+4-\frac{1}{10}}$ 이므로

$\log a_n=\left(\frac{1}{10}n+4-\frac{1}{10}\right)\log 2$

$=\left(\frac{1}{10}n+4-\frac{1}{10}\right)\times 0.301$

$=0.0301n+1.204-0.0301$

$=0.0301n+1.1739$

$=1+(0.0301n+0.1739)$

$0.0301n+0.1739\geq 1$ 에서

$0.0301n\geq 0.8261$

$n\geq 27.4\times\times\times$

따라서, $1\leq n\leq 27$ 일 때,

$\log a_n$의 가수 b_n은

$b_n=0.0301n+0.1739$

이므로 수열

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{27}$

은 공차가 0.0301 인 등차수열을 이룬다.

$b_{28}=0.0301\times 28+0.1739-1$ 이므로

$b_{28}+1=0.0301\times 28+0.1739$

$b_{29}=0.0301\times 29+0.1739-1$ 이므로

$b_{29}+1=0.0301\times 29+0.1739$

따라서, 수열

$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{27},\ b_{28}+1,\ b_{29}+1$

은 공차가 0.0301 인 등차수열을 이룬다.

그러므로 수열

$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_k,\ b_{k+1}+1$

이 등차수열을 이루는 k의 값은

27 이다.

답 27

미분과 적분

26.

(주어진 식)

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\right\}$

$=1\times 1\times 1=1$

답 ③

27.

$\cos^2 x=1-\sin^2 x,\quad 1-\cos 2x=2\sin^2 x$이므로

$2\sin x-4\sin x(1-\sin^2 x)+2\sin^2 x$

$=4\sin^3 x+2\sin^2-2\sin x$

$=2\sin x(\sin x+1)(2\sin x-1)=0$

$\therefore$ $\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $x=0,\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{0+6+9+1+5}{6}\pi=\frac{7}{2}\pi$$

답 ⑤

28.

주어진 그림에서

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ 이다.

이때, $\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$,

$\cos2\beta=\dfrac{3}{4}$ 이므로

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\{(\alpha+\beta)-2\beta\}$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos2\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin2\beta$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$=\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}$

답 ④

29.

$\lim\limits_{x\to\infty}x^a=\infty$이므로 주어진 등식이 성립하려면

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(b+\dfrac{c}{x^2}\right)=0$이어야 한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(b+\dfrac{c}{x^2}\right)=1$이어야 하므로

$b=1$

이때,

(주어진 식) $=\lim\limits_{x\to\infty}cx^{a-2}\ln\left(1+\dfrac{c}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{c}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}cx^{a-2}=2$

이어야 하므로

$a-2=0,\ c=2$

이어야 한다.

$\therefore$ $a=2,\ c=2$

$\therefore$ $a+b+c=2+1+2=5$

답 ①

30.

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$이므로 직선 AP의 방정식은

$$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$$

위 직선의 x절편은

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},0\right)$이다.

$\triangle ORP=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\sin\theta$

$\triangle OQP=\dfrac{1}{2}\times1\times\tan\theta$

이므로

$\triangle PQR=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta}-\tan\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}\right\}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}$

$\therefore$ $\alpha=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\sin^2\theta}{2\theta^2}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $100\alpha=50$

답 50

확률과 통계

26.

두 사건 A, B가 독립이므로

이때, $P(B)=p$라 하면

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이 므로

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+p-\frac{1}{4}p$$

$$\therefore\ p=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ P(B^C|A)=P(B^C)$$

$$=1-P(B)=1-p=\frac{2}{3}$$

답 ④

27.

14명의 학생 중에서 임의로 뽑은 3명이 선택한 악기가 모두 피아노일 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{14}C_3}$$

4명의 학생 중에서 임의로 뽑은 3명이 선택한 악기가 모두 바이올린일 확률은

$$\frac{{}_5C_3}{{}_{14}C_3}$$

14명의 학생 중에서 임의로 뽑은 3명이 선택한 악기가 모두 첼로일 확률은

$$\frac{{}_6C_3}{{}_{14}C_3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\dfrac{{}_3C_3+{}_5C_3}{{}_{14}C_3}}{\dfrac{{}_3C_3+{}_5C_3+{}_6C_3}{{}_{14}C_3}}=\frac{1+10}{1+10+20}=\frac{21}{31}$$

답 ⑤

28.

$$A(x)=\frac{x+10}{5}$$

$$M(x)=\begin{cases}2 & (x<2)\\ x & (2\le x\le 3)\\ 3 & (x>3)\end{cases}$$

이므로

$$A(x)-M(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{5} & (x<2)\\ -\dfrac{4}{5}x+2 & (2\le x\le 3)\\ \dfrac{x}{5}-1 & (x>3)\end{cases}$$

따라서 구하는 그래프의 개형은 ③이다.

답 ③

29.

자료 A에서 60점 이상 ~ 70점 미만인 계급의 도수는 30이고,

자료 A에서 70점 이상 ~ 80점 미만인 계급의 도수는 20이다.

그런데, 자료 B에서 두 계급의 상대도수가 서로 같으므로 추가된 10개의 자료는 모두 70점 이상 ~ 80점 미만인 계급에 속한다.

따라서 자료 B에서 70점 이상 ~ 80점 미만인 계급의 도수는 30이고, 나머지 계급의 도수는 자료 A의 도수와 같다.

ㄱ. (거짓) 70점 이상 ~ 80점 미만인 계급의 상대도수는 $\dfrac{30}{110}$이다.

ㄴ. (참) 자료 A의 평균은 70점 미만이다. 따라서 자료 B의 평균은 자료 A의 평균보다 크다.

ㄷ. (거짓) 자료 A와 자료 B의 중앙값은 모두 70점 이상 ~ 80점 미만인 계급에 속한다.

따라서 자료 B의 중앙값은 자료 A의 중앙값보다 크거나 같다.

답 ②

30.

각 세트에서 A가 이기는 것을 O, B가 이기는 것을 X라 하면 A가 승리하는 경우와 그 확률은 다음과 같다.

O : $\frac{1}{3}$

XOO : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

XOXO : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$

따라서 A가 승리할 확률은

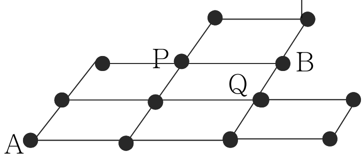
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{4}{3^4}=\frac{27+6+4}{81}=\frac{37}{81}$$

$$\therefore\ p+q=81+37=118$$

답 118

이산수학

26. 오른쪽 그림에서



A에서 출발하여 P를 거쳐 B로 갈 때 서로 다른 5개 지점을 거쳐 가는 방법의 수는 4가지

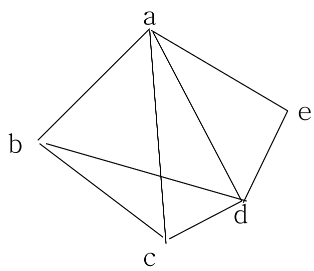
A에서 출발하여 Q를 거쳐 B로 갈 때 서로 다른 5개 지점을 거쳐 가는 방법의 수는 3가지

A에서 출발하여 P, Q를 거쳐 B로 갈 때 서로 다른 5개 지점을 거쳐 가는 방법의 수는 1가지이므로

구하는 모든 경우의 수는 8가지이다.

답 ②

27. 주어진 인접행렬을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 그래프를 적절하게 색칠하는데 b와 e에는 같은 색을 칠하고 c와 d는 a, b와 서로 다른 색을 칠해야 하므로 색칠하는데 필요한 최소의 색의 수는 4가지이다.

답 ④

28. ㄱ. 5와 7은 주어진 수와 서로소인 개수가 7개로 같으므로 꼭짓점의 차수

는 같다. (참)

ㄴ. 주어진 그래프 G는 모든 변이 꼭짓점에서만 만나도록 평면 위에 그릴 수 없으므로 평면그래프가 아니다. (거짓)

ㄷ. 꼭짓점의 차수가 홀수개인 것이 있으므로 그래프 G는 오일러회로가 존재하지

않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

29. 주어진 그래프에서 해밀턴회로를 갖는 것은 ①, ②, ⑤ 이고 ⑤의 그래프는 각 꼭짓점의 차수가 모두 2이므로 주어진 명제의 반례가 된다.

답 ⑤

30. 3일 동안 상담하는 학생 수는 모두 9명이므로 $a+b+c=9$이다. 이 때 각 요일별로 적어도 한 명의 학생과 상담해야 하므로

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$ 이라 하면

$a'+b'+c'=6$(단, a',b',c'은 음이 아닌 정수) 이다. 따라서 각 요일별로 상담하는 학생수는 3개의 문자를 중복해서 6번 선택하는 중복조합의 수

${}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2$ 와 같다.

따라서 ${}_8C_2=\frac{8\times7}{2}=28$ (가지)

답 28