2010학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시 수리 영역

'나'형 | 성명 | 수험 번호 | 3 | 1

◦ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
◦ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
◦ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 5 ③ 10 ④ 20 ⑤ 40

2. $\log_5 3 \times (\log_3 \sqrt{5} - \log_{\frac{1}{9}} 125)$ 의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

3. $\lim_{n \to \infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

4. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$에 대하여 $AB + A^{-1} = E$가 성립할 때, 상수 a의 값은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

5. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 있다. 다음 중 실수 θ의 값에 관계없이 행렬 $X = \sin\theta A + \cos\theta E$의 역행렬과 항상 같은 행렬은? [3점]

① $\sin\theta A + \cos\theta E$ ② $\sin\theta A - \cos\theta E$ ③ $-\sin\theta A + \cos\theta E$
④ $\cos\theta A + \sin\theta E$ ⑤ $\cos\theta A - \sin\theta E$

6. 집합 $A=\{2^n \mid n$은 자연수$\}$의 원소 중에서 상용로그의 지표가 1인 모든 원소의 합은? [3점]

① 112 ② 114 ③ 116 ④ 118 ⑤ 120

7. 어떤 물질의 화학 반응에서 이 물질의 온도 T와 화합물이 생성되는 반응 속도 v 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log \frac{v}{v_0}=K\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)$$ (단, K, T_0, v_0는 상수이다.)

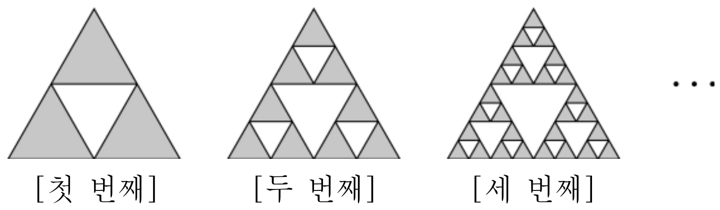
이 물질의 온도가 $2T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는 $\sqrt{10}\,v_0$이다. 이 물질의 온도가 $4T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는? [3점]

① $\sqrt[3]{100}\,v_0$ ② $\sqrt[4]{1000}\,v_0$ ③ $10\,v_0$
④ $10\sqrt[3]{10}\,v_0$ ⑤ $10\sqrt{10}\,v_0$

8. 두 행렬 $A=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{12}+B^{12}$의 모든 성분의 합은? [3점]

① 0 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

9. 한 개의 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 27개의 정삼각형이 남는다. 그림은 이와 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.



두 정삼각형이 공유하는 꼭짓점은 한 개의 꼭짓점으로 셀 때, n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6$, $a_2=15$이다. a_5의 값은? [4점]

① 366 ② 376 ③ 386
④ 396 ⑤ 406

10. 서로 다른 세 실수 x, y, z가 $2^x=3^y=6^z$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $2^x \cdot 3^y = 36^z$

ㄴ. $2^z \cdot 3^{z-y} = 1$

ㄷ. $x+y=1$이면 $z=\log_6 2 \cdot \log_6 3$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^2=E$, $B^2=E$이면 $(ABA)^2=E$이다.

ㄴ. $A^2=O$, $B^2=O$이면 $AB=O$이다.

ㄷ. $(A+E)^2=O$, $AB=A$이면 $B=E$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 좌표평면에서 점 A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.

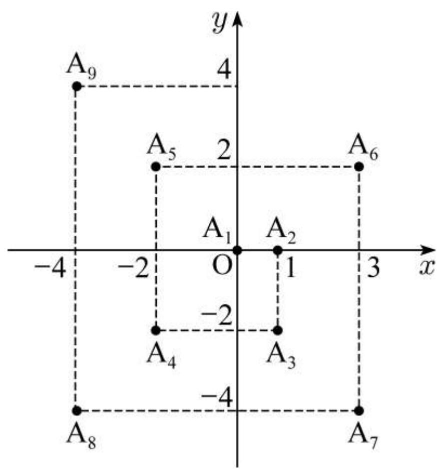
(나) 점 A_{4n-3}을 x축의 양의 방향으로 $(4n-3)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-2}이다.

(다) 점 A_{4n-2}를 y축의 음의 방향으로 $(4n-2)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-1}이다.

(라) 점 A_{4n-1}을 x축의 음의 방향으로 $(4n-1)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n}이다.

(마) 점 A_{4n}을 y축의 양의 방향으로 $4n$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n+1}이다.

그림은 위의 규칙대로 정한 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$ 의 일부를 나타낸 것이다.



점 A_{50}의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

13. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n \geq n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geq \boxed{\text{(가)}}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)+\cdots$

$\quad+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}$

$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)$

$\quad+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots$

$\quad+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$

$\geq\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$

$\quad+\cdots+\boxed{\text{(나)}}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\boxed{\text{(다)}}$

$=\boxed{\text{(가)}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
②	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
③	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
④	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
⑤	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

14. 두 이차정사각행렬 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2=2A+E$
(나) $AB=2E$
(다) 행렬 A의 모든 성분의 합은 7이다.

행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

15. 각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n=\log_3 a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{11}의 값은? [4점]

(가) $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}=36$
(나) $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}=45$

① 3^5 ② 3^6 ③ 3^7 ④ 3^8 ⑤ 3^9

16. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(2010)=f(0.201)$

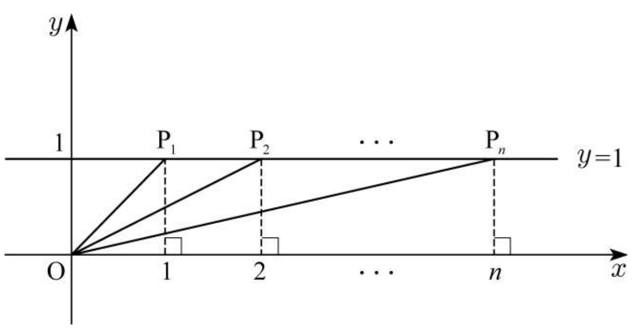
ㄴ. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

ㄷ. $x>1,\ y>1,\ f(x)+f(y)=0$이면 $x,\ y$는 모두 정수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 좌표평면에서 직선 $y=1$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

a_n=(선분 OP_n의 길이) $(n=1, 2, 3, \cdots)$



$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$ 의 값은? (단, O는 원점이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

단답형(18 ~ 25)

18. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$일 때, $abcd$의 값을 구하시오. [3점]

19. 이차함수 $f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2,\ b_1=2$
(나) $a_2=b_2,\ a_4=b_4$

a_5+b_5의 값을 구하시오. (단, 수열 $\{b_n\}$의 공비는 1이 아니다.) [3점]

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) $1<n<10$
(나) $\log\frac{1}{n}$의 가수는 $\log n^2$의 가수보다 크다.

22. $x,\ y$에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} a & -3 \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x-y \\ 2y \end{pmatrix}$$

가 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [3점]

23. 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$$\begin{cases} \log_2 ab+\log_2 bc=5 \\ \log_2 bc+\log_2 ca=8 \\ \log_2 ca+\log_2 ab=7 \end{cases}$$

이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

24. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 자연수 m, n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $A^m = A^n$
> (나) m, n은 100 이하의 서로 다른 자연수이다.

$|m-n|$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

25. 1부터 연속된 자연수를 아래와 같이 제 n 행에는 n 개의 자연수가 오도록 나열하였다.

제 1 행	1
제 2 행	2 3
제 3 행	4 5 6
제 4 행	7 8 9 10
제 5 행	11 12 13 14 15
제 6 행	16 17 18 19 20 21
⋮	⋮

제19 행에 나열된 모든 자연수의 평균을 구하시오. [4점]

5지 선다형

26. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1 = 1, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_{20}의 값은? [3점]

① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

27. 1부터 연속된 자연수를 나열하여 각 자릿수로 다음과 같은 수열을 만들었다.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, ⋯

이 수열의 제 n 항부터 연속된 네 개의 항이 차례로 2, 0, 1, 0 일 때, 자연수 n의 최솟값은? [4점]

① 2960 ② 2964 ③ 2968 ④ 2972 ⑤ 2976

28. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$에 대하여

$$A^{-1}B^nA=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+c_n}{a_n+d_n}$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

29. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\alpha$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, α는 0이 아닌 실수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이다.

ㄴ. $\alpha=1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{1}{\alpha}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

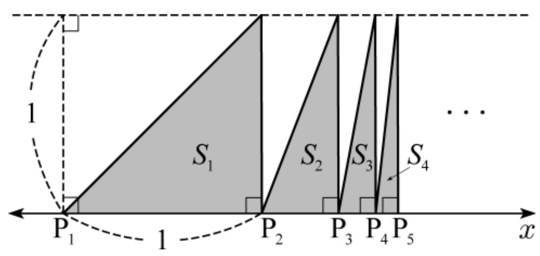
30. 수직선 위에 점 $\mathrm{P}_n\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $\mathrm{P}_1(0)$이다.

(나) $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=1$이다.

(다) $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\dfrac{n-1}{n+1}\times\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}\ \ (n=2,\,3,\,4,\,\cdots)$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{50}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



※ **확인 사항**
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.