제 2 교시 수리 영역

'가'형 | 성명 | 수험 번호 | 3

◦ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
◦ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
◦ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $2^{\frac{2}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{4}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 5 ③ 10 ④ 20 ⑤ 40

2. $\log_5 3 \times (\log_3 \sqrt{5} - \log_{\frac{1}{9}} 125)$의 값은? [2점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

3. $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

4. 부등식 $a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x < -2$일 때, 부등식

$$\log_a (x-2) < \log_a (4-x)$$

의 해는? (단, 상수 a는 1이 아닌 양수이다.) [3점]

① $2 < x < 3$ ② $3 < x < 4$ ③ $2 < x < 4$
④ $x < 3$ ⑤ $x > 3$

5. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 있다. 다음 중 실수 θ의 값에 관계없이 행렬 $X = \sin\theta A + \cos\theta E$의 역행렬과 항상 같은 행렬은? [3점]

① $\sin\theta A + \cos\theta E$ ② $\sin\theta A - \cos\theta E$ ③ $-\sin\theta A + \cos\theta E$
④ $\cos\theta A + \sin\theta E$ ⑤ $\cos\theta A - \sin\theta E$

6. 네 면에 숫자 1, 2, 3, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 주사위와 여섯 면에 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 주사위를 평평한 바닥에 던졌다. 두 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자의 합이 짝수일 때, 정육면체 모양의 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자가 짝수일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. 어떤 물질의 화학 반응에서 이 물질의 온도 T와 화합물이 생성되는 반응 속도 v 사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\frac{v}{v_0}=K\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)$$ (단, K, T_0, v_0는 상수이다.)

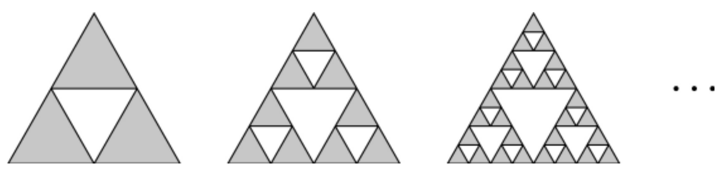
이 물질의 온도가 $2T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는 $\sqrt{10}\,v_0$이다. 이 물질의 온도가 $4T_0$일 때, 화합물이 생성되는 반응 속도는? [3점]

① $\sqrt[3]{100}\,v_0$ ② $\sqrt[4]{1000}\,v_0$ ③ $10\,v_0$
④ $10\sqrt[3]{10}\,v_0$ ⑤ $10\sqrt{10}\,v_0$

8. 두 행렬 $A=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A^{12}+B^{12}$의 모든 성분의 합은? [3점]

① 0 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

9. 한 개의 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 27개의 정삼각형이 남는다. 그림은 이와 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.


[첫 번째] [두 번째] [세 번째]

두 정삼각형이 공유하는 꼭짓점은 한 개의 꼭짓점으로 셀 때, n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6$, $a_2=15$이다. a_5의 값은? [4점]

① 366 ② 376 ③ 386
④ 396 ⑤ 406

10. 서로 다른 세 실수 x, y, z가 $2^x = 3^y = 6^z$을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $2^x \cdot 3^y = 36^z$
ㄴ. $2^z \cdot 3^{z-y} = 1$
ㄷ. $x+y=1$이면 $z = \log_6 2 \cdot \log_6 3$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

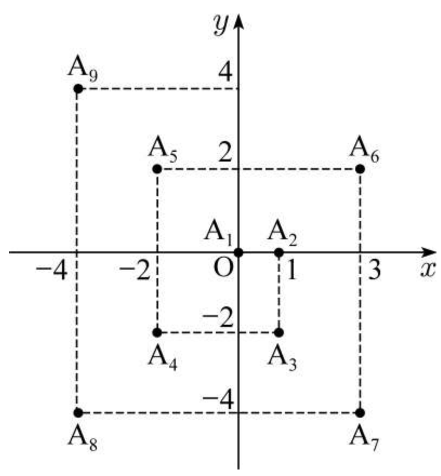
ㄱ. $A^2 = E$, $B^2 = E$이면 $(ABA)^2 = E$이다.
ㄴ. $A^2 = O$, $B^2 = O$이면 $AB = O$이다.
ㄷ. $(A+E)^2 = O$, $AB = A$이면 $B = E$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 좌표평면에서 점 A_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
(나) 점 A_{4n-3}을 x축의 양의 방향으로 $(4n-3)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-2}이다.
(다) 점 A_{4n-2}를 y축의 음의 방향으로 $(4n-2)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-1}이다.
(라) 점 A_{4n-1}을 x축의 음의 방향으로 $(4n-1)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n}이다.
(마) 점 A_{4n}을 y축의 양의 방향으로 $4n$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n+1}이다.

그림은 위의 규칙대로 정한 점 A_1, A_2, A_3, $\cdots$ 의 일부를 나타낸 것이다.



점 A_{50}의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

13. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n \geq n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geq \boxed{\text{(가)}}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)$$

$$+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$$

$$\geq\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$+\cdots+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

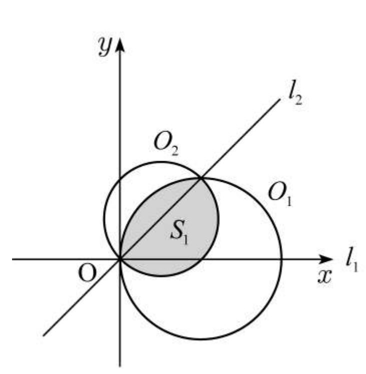
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\boxed{\text{(다)}}$$

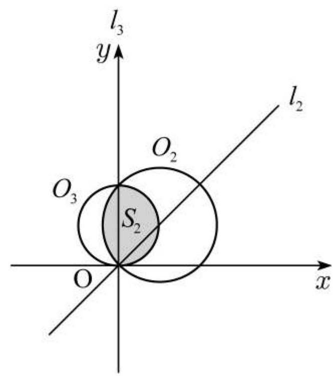
$$=\boxed{\text{(가)}}$$

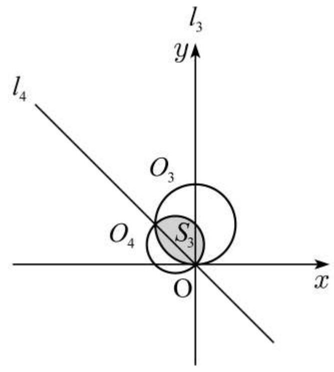
위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
②	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
③	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
④	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$
⑤	$\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$	$\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

14. 좌표평면에서 점 $(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 O_1이라 하고, x축을 직선 l_1이라 하자.
직선 l_1을 원점을 중심으로 하여 $45°$만큼 회전시킨 직선을 l_2라 하고, 직선 l_2와 원 O_1의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2라 할 때, 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.
직선 l_2를 원점을 중심으로 하여 $45°$만큼 회전시킨 직선을 l_3이라 하고, 직선 l_3과 원 O_2의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3이라 할 때, 두 원 O_2, O_3의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.
직선 l_3을 원점을 중심으로 하여 $45°$만큼 회전시킨 직선을 l_4라 하고, 직선 l_4와 원 O_3의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4라 할 때, 두 원 O_3, O_4의 공통부분의 넓이를 S_3이라 하자.





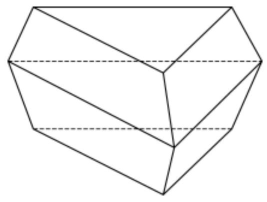


$\cdots$

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은? [4점]

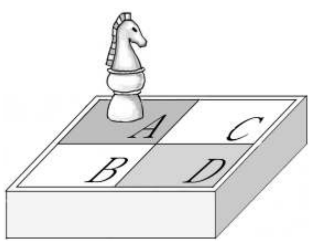
① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

15. 그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 경우의 수는? (단, 팔면체를 회전시켰을 때 색의 배열이 일치하면 같은 경우로 생각한다.) [4점]



① 6520 ② 6620 ③ 6720 ④ 6820 ⑤ 6920

16. 그림과 같은 말과 말판이 있다. 말은 한 번에 한 칸씩 인접한 칸으로 움직이는 데 인접한 각 칸으로 이동할 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다. 예를 들어 A에 있던 말이 A와 인접한 칸인 B, C로 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다. 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 처음으로 D에 도착할 확률을 P_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $P_2 = \frac{1}{2}$

ㄴ. $P_{2n+2} = \frac{1}{2} P_{2n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} P_k = \frac{1023}{1024}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 모집인원이 200명인 어느 대학의 입학시험에 1000명의 수험생이 응시하였다. 수험생의 점수는 평균이 156점이고 표준편차가 20점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격하기 위한 최저 점수를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.52	0.20
0.67	0.25
0.84	0.30
1.00	0.34

① 166.4점 ② 168.8점 ③ 169.4점 ④ 170.8점 ⑤ 172.8점

단답형(18 ~ 25)

18. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$일 때, $abcd$의 값을 구하시오. [3점]

19. 이차함수 $f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 $P_n(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$의 값을 구하시오. [3점]

20. 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1=2,\ b_1=2$
> (나) $a_2=b_2,\ a_4=b_4$

a_5+b_5의 값을 구하시오. (단, 수열 $\{b_n\}$의 공비는 1이 아니다.) [3점]

21. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $1<n<10$
> (나) $\log\frac{1}{n}$의 가수는 $\log n^2$의 가수보다 크다.

22. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(3)$은 짝수이다.
> (나) $x<3$이면 $f(x)<f(3)$이다.
> (다) $x>3$이면 $f(x)>f(3)$이다.

함수 f의 개수를 구하시오. [3점]

23. 그림과 같이 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 최솟값을 확률변수 X라 하자. X의 평균이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

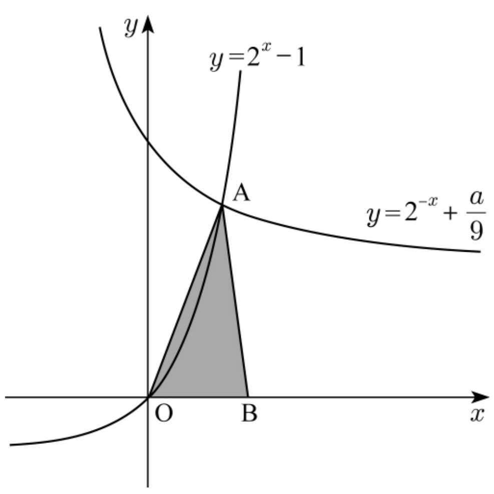
24. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $a_1=2$
(나) $a_{n+1}=(a_n^2+a_n$을 5로 나눈 나머지$)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

25. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=2^{-x}+\frac{a}{9}$의 교점을 A라 하자. 점 B의 좌표가 $(4,\ 0)$일 때, 삼각형 AOB의 넓이가 16이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점]



5지 선다형

26. $(x+a)^{10}$의 전개식에서 세 항 x, x^2, x^4의 계수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값은? (단, $a\neq 0$) [3점]

① $\frac{28}{27}$ ② $\frac{27}{26}$ ③ $\frac{26}{25}$ ④ $\frac{25}{24}$ ⑤ $\frac{24}{23}$

27. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

확률변수 X의 분산이 $\frac{5}{12}$일 때, $(a-b)^2$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

28. 여섯 면에 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 100번 반복하여 던질 때, 3의 배수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{50}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값은? [4점]

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ ③ $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$
④ $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$ ⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{50}-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$

29. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$ 이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n<\lim_{n\to\infty}b_n$ 이다.

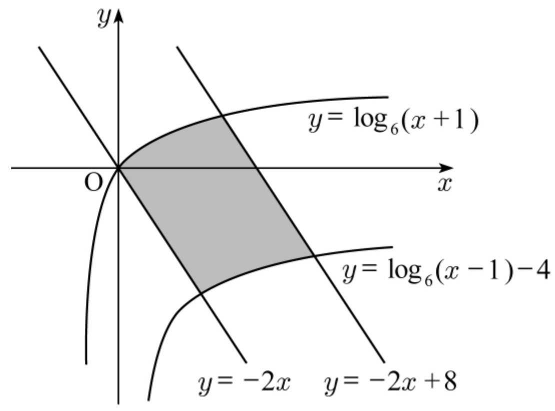
ㄴ. 두 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

단답형

30. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_6(x+1)$, $y=\log_6(x-1)-4$와 두 직선 $y=-2x$, $y=-2x+8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]



※ 확인 사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.