“나”형 정답

1	①	*2*	⑤	*3*	④	*4*	①	*5*	③
6	⑤	*7*	②	*8*	①	*9*	④	*10*	③
11	③	*12*	③	*13*	①	*14*	②	*15*	①
16	②	*17*	②	*18*	①	*19*	④	*20*	④
21	⑤	*22*	21	*23*	16	*24*	3	*25*	18
26	14	*27*	7	*28*	128	*29*	4	*30*	40

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2^{\frac{6}{2}} \times \left(2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times 2 = 16$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$5^{2\log_5 3} = 5^{\log_5 9} = 9$

3. [출제의도] 역행렬 계산하기

$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$2^{xy} = \left(2^x\right)^y = 3^y = 5$

5. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2A - E)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$\alpha + \beta = 5,\ \alpha\beta = -4$

$AB = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -1+\alpha\beta \\ 3 & -2-\beta \end{pmatrix}$

모든 성분의 합은 $1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta = -8$

7. [출제의도] 제곱근의 성질 이해하기

$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} = \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{12}}$

$\mathrm{B} = \sqrt[4]{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{12}} = \left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{12}}$

$\mathrm{C} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{15}}} = \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{2}{12}} = \left(\frac{1}{225}\right)^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ \mathrm{A} < \mathrm{C} < \mathrm{B}$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기
$(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)=(x^2-y^2)^2$
$=\left\{\left(\sqrt{\log_2 3}\right)^2-\left(\sqrt{\log_2 6}\right)^2\right\}^2=(\log_2 3-\log_2 6)^2$
$=1$

9. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기
주어진 행렬의 그래프는 꼭짓점에서 연결된 변의 개수가 3, 3, 2, 4, 3, 3 이다.
꼭짓점에 연결된 변의 개수를 표현하면
① 3, 2, 2, 2, 3, 4
② 5, 4, 5, 5, 4, 5
③ 3, 3, 3, 2, 3, 2
<u>④ 3, 3, 2, 4, 3, 3</u>
⑤ 3, 3, 3, 3, 3, 3

10. [출제의도] 주어진 행렬의 성질 추론하기
$A=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$라 하면
ㄱ. $AB=\begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yw \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} zx & 0 \\ 0 & wy \end{pmatrix}=BA$ (참)
ㄴ. $xy\neq 0$ 이므로 A^{-1}이 존재한다.
$A^{-1}AC=A^{-1}O$ 이므로 $C=O$ (참)
ㄷ. $A^3-A^2-2A=A(A^2-A-2E)=O$
A^{-1}이 존재하므로 $A^2-A-2E=O$
$\begin{pmatrix} x^2-x-2 & 0 \\ 0 & y^2-y-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$x=2,\ -1$ 이고 $y=2,\ -1$ 이므로
행렬 A의 개수는 4개이다. (거짓)

11. [출제의도] 행렬의 거듭제곱 계산하기
$A^3=-E,\ A^4=-A$
$E+A^2+A^4+A^6+\cdots+A^{100}$
$=(E+A^2-A)+\ \cdots\ +(E+A^2-A)$
$=17(E+A^2-A)=O$

12. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제해결하기
$v=2^{-2}\times 10^{0.5}\times 8^{1.67}\times 4^{-1.17}=2^{0.67}\times 10^{0.5}$
$\log v^{1000}=1000(0.67\log 2+0.5)$
$=1000(0.201+0.5)=701$

13. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식의 관계 이해하기
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & -2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
연립일차방정식의 해가 무수히 많으므로
$(1-k)(-2-k)-4=(k-2)(k+3)=0$

(i) $k=2$ 일 때, $y=\dfrac{1}{2}x$

(ii) $k=-3$일 때, $y=-2x$

$\therefore\ k=-3$

14. [출제의도] 역행렬을 구하는 과정 추론하기

$AB+A=E$에서 $A(B+E)=E$이므로

$(B+E)A=E$

$\therefore\ AB-BA=\boxed{O}$ ……… ①

①에 의하여

$AB+BA=A+B$

$\Leftrightarrow \boxed{2AB-B}=A$

$\Leftrightarrow \boxed{2AB-B}+AB=A+AB$

$\Leftrightarrow \boxed{(3A-E)}\times B=E$

그러므로 $B^{-1}=\boxed{3A-E}$

15. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$ax^2-bx+c=0$의 두 근을 1, α라 하면

대칭축은 $x=\dfrac{1+\alpha}{2}$

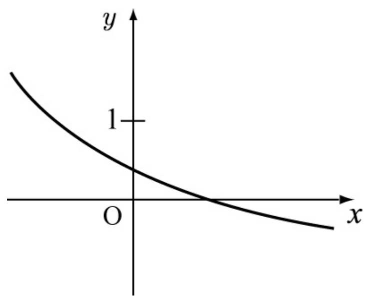
$0<\dfrac{1+\alpha}{2}<1$이고 $\alpha<0$이므로 $-1<\alpha<0$

근과 계수와의 관계에 의하여

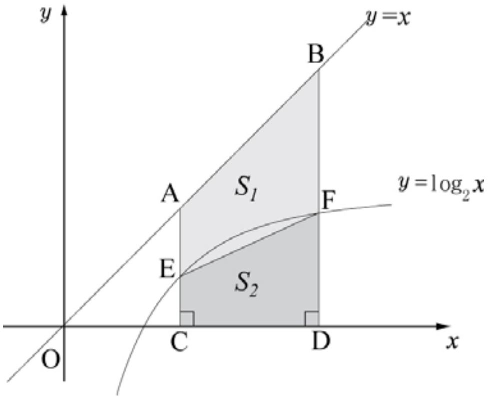
$1+\alpha=\dfrac{b}{a}$, $1\times\alpha=\dfrac{c}{a}$ 이므로

$0<\dfrac{b}{a}<1$, $-1<\dfrac{c}{a}<0$

따라서 지수함수 $y=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x+\left(\dfrac{c}{a}\right)$의 개형은



16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적 문제해결하기



$S_1 : S_2 = 4 : 3$, $S_1 = \dfrac{4}{3}S_2$

$S_1 + S_2 = \dfrac{7}{3}S_2 = \dfrac{1}{2}(b-a)(a+b)$

$S_2 = \dfrac{1}{2}(b-a)\left(\log_2 a + \log_2 b\right)$

$\dfrac{7}{3} \times \dfrac{1}{2}(b-a)\log_2 ab = \dfrac{1}{2}(b-a)(a+b)$

$a+b=7$이므로 $\log_2 ab = 3$ $\therefore ab = 8$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=33$

17. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 수학내적 문제해결하기

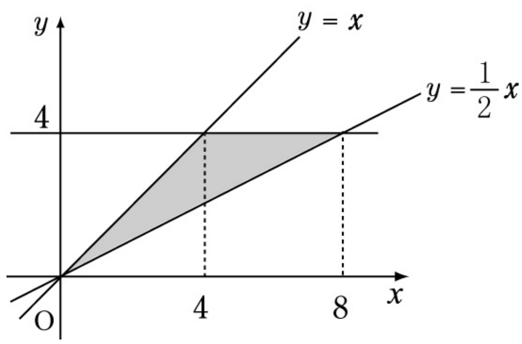
(i) $2^{\frac{y}{2}} \le 2^2$ $\quad \therefore y \le 4 \cdots$ ①

(ii) $\log_2 y \le \log_2 x$, $y \le x$

$\log_2 y \ge \log_2 x - 1$, $\log_2 y \ge \log_2 \dfrac{x}{2}$, $y \ge \dfrac{x}{2}$

$\therefore \dfrac{x}{2} \le y \le x \cdots$ ②

①, ②의 공통부분을 좌표평면에 나타내면



$\therefore$ $S = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

18. [출제의도] 지수방정식의 해 계산하기

$f(x+2) = A$ 라 하면

$f(A) = 4$, $A = 2$ ($\because$ $A > 0$)

$f(x+2) = 2$ 이므로 $x+2 = \pm 1$

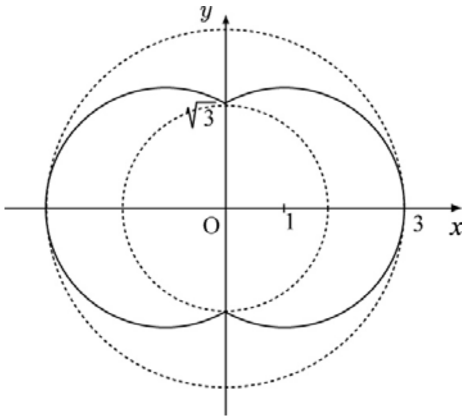
$x = -1,\ -3$
$\therefore$ 근의 합은 -4

19. [출제의도] 상용로그 가수의 성질 추론하기
ㄱ. 【반례】 $a = 10$ 일 때,
$f(10) = 0,\ f\left(\frac{1}{10}\right) = 0$ 이므로
$f(10) + f\left(\frac{1}{10}\right) \neq 1$ (거짓)

ㄴ. $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta$ 라 하면
$\left(a,\ \frac{1}{b}\right) \in S$ 이므로
$f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = \alpha + (1-\beta) = 1 \quad \therefore\ \alpha = \beta$
$f(b) + f\left(\frac{1}{a}\right) = \beta + (1-\alpha) = 1$ 이므로
$\left(b,\ \frac{1}{a}\right) \in S$ (참)
ㄷ. $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta,\ f(c) = \gamma$ 라 하면
$\left(a,\ \frac{1}{b}\right) \in S$ 이므로 $\alpha = \beta$
$\left(b,\ \frac{1}{c}\right) \in S$ 이므로 $\beta = \gamma$
따라서 $\alpha = \gamma$ 이고, $\alpha + (1-\gamma) = 1$ 이므로
$\left(a,\ \frac{1}{c}\right) \in S$ (참)

20. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제해결하기
2010 년 초 자전거 보유 인구
$500 \times 10^4 \times \frac{16}{100}$
5년 후 자전거 보유 인구
$500 \times 10^4 \times \frac{16}{100}(1+0.28)^5$
$(1.28)^5 = x$ 라 하면
$\log x = 5\log 1.28 = 5(0.108) = 0.54$
$x = 3.50$
5년 후 자전거 보유 인구는
$500 \times 10^4 \times \frac{16}{100} \times 3.50$
$$\therefore\ \frac{500 \times 10^4 \times \frac{16}{100} \times 3.50}{500 \times 10^4} \times 100 = 56\%$$

21. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기



역행렬이 존재하지 않으므로

$|x|^2-2|x|+y^2-3=0$

$(|x|-1)^2+y^2=4$

$x^2+y^2=k$라 하면 중심이 원점이고 반지름의

길이가 $\sqrt{k}$인 원을 나타내므로

$x=0,\ y=\pm\sqrt{3}$일 때, $k=3$

$x=\pm 3,\ y=0$일 때, $k=9$

$3 \le k \le 9$이므로 최댓값은 9, 최솟값은 3

$\therefore M+m=12$

22. [출제의도] 행렬 계산하기

$(A-B)C=\left\{\begin{pmatrix}1&4\\5&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 21이다.

23. [출제의도] 로그 계산하기

$2\log_2 3 \times 8\log_3 2=16$

24. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

$M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$라 하면 꼭짓점 A에서 출발하여 두 개의 꼭짓점을 거쳐 B로 가는 방법의 수는 M^3의 1행 2열의 값을 의미하므로 3가지이다.

25. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$\log_2 \sin\theta\cos\theta = -4$, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{16}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{9}{8}$

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2 x-4$이므로

$\log_2\dfrac{9}{8}=\log_2\dfrac{x}{16}$

$\therefore\ x=18$

26. [출제의도] 주어진 행렬의 성질 이해하기

$a_{ij}=a_{ji}$ 이므로 $a_{12}=a_{21}$

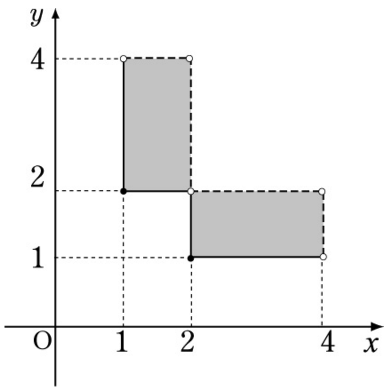
$b_{ij}=-b_{ji}$ 이므로 $b_{11}=b_{22}=0$, $b_{21}=-b_{12}$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}+b_{12} \\ a_{21}-b_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$
$a_{22}=7,\ a_{21}=7\ \ \therefore a_{21}+a_{22}=14$

27. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기
k, n, α가 방정식의 세 근이므로
$(x-k)(x-n)(x-\alpha)=0$
$x^3-(k+n+\alpha)x^2+(kn+n\alpha+k\alpha)x-kn\alpha=0$
이때, 지표가 n이므로 $k=n+1$
$k+n+\alpha=2n+1+\alpha=7+\dfrac{1}{4}$
$n=3,\ k=4,\ \alpha=\dfrac{1}{4}$ ($\because$ n은 정수)
$p=kn\alpha=3\ \ \therefore p+k=7$

28. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 수학내적 문제해결하기
$\dfrac{1}{2}a^2=2^b,\ \dfrac{1}{2}c^2=4^d$ 이므로
$\dfrac{1}{4}(ac)^2=2^{b+2d}=2^{12}$
$\therefore\ ac=2^7=128$

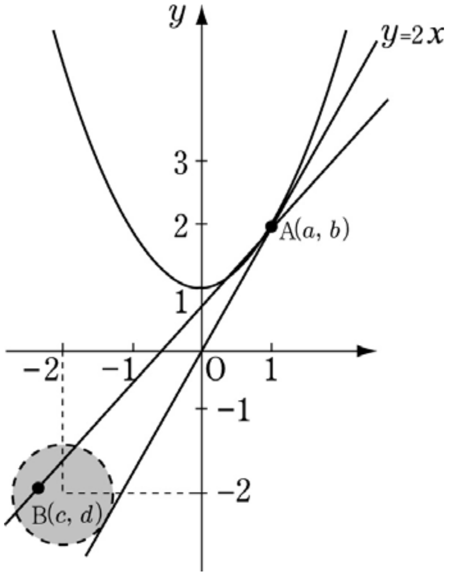
29. [출제의도] 상용로그 지표의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기
$[\log_2 x]=0,\ [\log_2 y]=1$ 일 때
$1\le x<2,\ 2\le y<4\ \cdots$ ①
$[\log_2 x]=1,\ [\log_2 y]=0$ 일 때
$2\le x<4,\ 1\le y<2\ \cdots$ ②
①, ②를 좌표평면에 나타내면



두 사각형 넓이의 합은 4이다.

30. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기
$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로 $\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{d}{c}$이다. 즉, 점 A와 점 B를 연결한 직선은 원점을 지나지 않는다.
원점을 지나며 함수 $y=x^2+1$에 접하는 직선은

$y=2x$ 이므로 r은 $y=2x$와 $(-2,\ -2)$
사이의 거리보다 작거나 같아야 한다.



$\therefore\ r \leq \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

그러므로 $50r^2$의 최댓값은 40