수리 영역

"가"형 정답

1	①	2	⑤	3	④	4	①	5	③
6	①	7	②	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	③	13	⑤	14	②	15	⑤
16	②	17	①	18	①	19	④	20	③
21	⑤	22	21	23	2	24	299	25	18
26	375	27	7	28	15	29	12	30	19

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2^{\frac{6}{2}} \times (2^{-2})^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times 2 = 16$

2. [출제의도] 등비수열의 항 계산하기

$a_1 = 3,\ r = 2$이므로 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_7 = 192$

3. [출제의도] 역행렬 계산하기

$A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

4. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$2^{xy} = (2^x)^y = 3^y = 5$

5. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$A^2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2A - E)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

6. [출제의도] 극한의 성질 이해하기

$\lim_{n\to\infty} a_n = 15$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5^n}{3^n + 5^{n+1}} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 5^n}{3^n + 5^{n+1}} \times \lim_{n\to\infty} a_n$

$= \frac{1}{5} \times 15 = 3$

7. [출제의도] 제곱근의 성질 이해하기

$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{12}} = \left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{12}}$

$\mathrm{B} = \sqrt[4]{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{3}{12}} = \left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{1}{12}}$

$\mathrm{C} = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{15}}} = \left(\dfrac{1}{15}\right)^{\frac{2}{12}} = \left(\dfrac{1}{225}\right)^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ \mathrm{A} < \mathrm{C} < \mathrm{B}$

8. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$a_n = \log\dfrac{n+1}{n}$ 이므로

$\displaystyle\sum_{k=50}^{m} a_k = \log\frac{51}{50} + \log\frac{52}{51} + \cdots + \log\frac{m+1}{m}$

$= \log\dfrac{m+1}{50} = \log\dfrac{49}{25} \quad \therefore m = 97$

9. [출제의도] 행렬과 그래프의 관계 이해하기

주어진 행렬의 그래프는 꼭짓점에서 연결된 변의 개수가 3, 3, 2, 4, 3, 3 이다.
꼭짓점에 연결된 변의 개수를 표현하면
① 3, 2, 2, 2, 3, 4
② 5, 4, 5, 5, 4, 5
③ 3, 3, 3, 2, 3, 2
<u>④ 3, 3, 2, 4, 3, 3</u>
⑤ 3, 3, 3, 3, 3, 3

10. [출제의도] 주어진 행렬의 성질 추론하기

$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$라 하면

ㄱ. $AB = \begin{pmatrix} xz & 0 \\ 0 & yw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zx & 0 \\ 0 & wy \end{pmatrix} = BA$ (참)

ㄴ. $xy \neq 0$ 이므로 A^{-1}이 존재한다.
$A^{-1}AC = A^{-1}O$ 이므로 $C = O$ (참)

ㄷ. $A^3 - A^2 - 2A = A(A^2 - A - 2E) = O$
A^{-1}이 존재하므로 $A^2 - A - 2E = O$
$\begin{pmatrix} x^2 - x - 2 & 0 \\ 0 & y^2 - y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$x = 2,\ -1$ 이고 $y = 2,\ -1$ 이므로
행렬 A의 개수는 4개이다. (거짓)

11. [출제의도] 무한등비급수 이해하기

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2} = 2$에서 $\dfrac{ar}{1-r} = 2(1+r)$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} = \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{ar \times r}{(1-r)(1+r+r^2)} = \frac{6}{7}$

$\dfrac{2r(1+r)}{1+r+r^2} = \dfrac{6}{7} \quad \therefore r = \dfrac{1}{2} \ (\because\ -1 < r < 1)$

12. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학외적 문제해결하기

$v = 2^{-2} \times 10^{0.5} \times 8^{1.67} \times 4^{-1.17} = 2^{0.67} \times 10^{0.5}$

$\log v^{1000} = 1000(0.67\log 2 + 0.5)$
$= 1000(0.201 + 0.5) = 701$

13. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여
부등식의 성질 추론하기

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)= $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}<2=$(우변)이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt{k}$

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-\boxed{2\sqrt{k+1}}$

$<\ 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-\boxed{2\sqrt{k+1}}$

$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$

이 때,

$\left(2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1\right)^2-\{2\sqrt{2}(k+1)\}^2\boxed{<}\ 0$이므로

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<2\sqrt{k+1}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 부등식은 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다

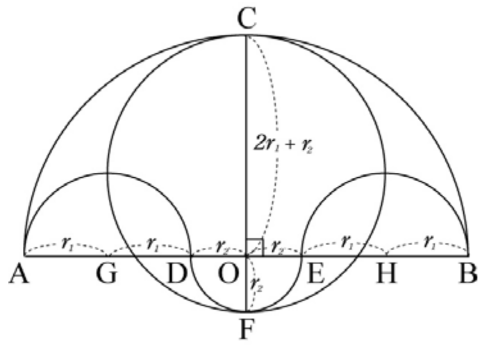
14. [출제의도] 도형의 규칙성을 이용하여
수학내적 문제해결하기

$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2,\ \cdots$

이므로 $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\quad\therefore a_{10}=\left(\frac{3}{4}\right)^9$

15. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기



$\overline{AB}=10$ 이므로 $4r_1+2r_2=10$

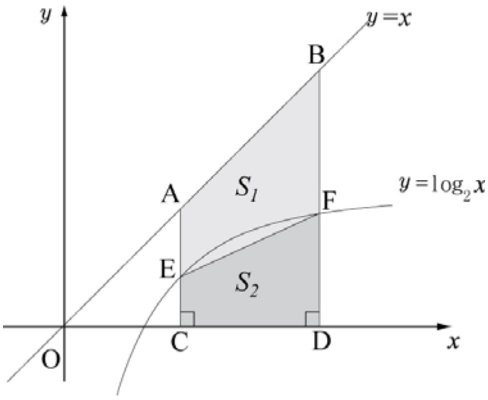
$\overline{DE}=2r_2,\ \overline{AD}=2r_1,\ \overline{CF}=2r_1+2r_2$ 가 차례로

등차수열을 이루므로 $4r_1=2r_1+4r_2$

$\therefore r_1=2,\ r_2=1$

셀리논(Salinon)의 넓이 S는
$S=\frac{1}{2}\times 5^2\pi-2\times\frac{1}{2}\times 4\pi+\frac{1}{2}\pi=9\pi$
【참고】
셀리논의 넓이는 $\overline{\mathrm{CF}}$를 지름으로 하는 원의 넓이와 같다.

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수학내적 문제해결하기



$S_1:S_2=4:3$, $S_1=\frac{4}{3}S_2$

$S_1+S_2=\frac{7}{3}S_2=\frac{1}{2}(b-a)(a+b)$

$S_2=\frac{1}{2}(b-a)(\log_2 a+\log_2 b)$

$\frac{7}{3}\times\frac{1}{2}(b-a)\log_2 ab=\frac{1}{2}(b-a)(a+b)$

$a+b=7$이므로 $\log_2 ab=3$ $\therefore ab=8$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=33$

17. [출제의도] 순서도를 이용하여 수열의 합 추론하기
$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $\cdots$
$S_1=1$, $S_2=1+3$, $S_3=1+3+7$, $\cdots$
$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^n-1$ $(n=2,3,4,\cdots)$
$S=\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10=2036$

18. [출제의도] 지수방정식의 해 계산하기
$f(x+2)=A$ 라 하면
$f(A)=4$, $A=2$ ($\because A>0$)
$f(x+2)=2$ 이므로 $x+2=\pm 1$
$x=-1$, -3
$\therefore$ 근의 합은 -4

19. [출제의도] 상용로그 가수의 성질 추론하기
ㄱ. 【반례】 $a=10$ 일 때,

$f(10)=0$, $f\left(\frac{1}{10}\right)=0$ 이므로

$f(10)+f\left(\frac{1}{10}\right)\neq 1$ (거짓)

ㄴ. $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$라 하면

$\left(a,\ \frac{1}{b}\right)\in S$이므로

$f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right)=\alpha+(1-\beta)=1 \quad \therefore\ \alpha=\beta$

$f(b)+f\left(\frac{1}{a}\right)=\beta+(1-\alpha)=1$이므로

$\left(b,\ \frac{1}{a}\right)\in S$ (참)

ㄷ. $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, $f(c)=\gamma$라 하면

$\left(a,\ \frac{1}{b}\right)\in S$이므로 $\alpha=\beta$

$\left(b,\ \frac{1}{c}\right)\in S$이므로 $\beta=\gamma$

따라서 $\alpha=\gamma$이고, $\alpha+(1-\gamma)=1$이므로

$\left(a,\ \frac{1}{c}\right)\in S$ (참)

20. [출제의도] 규칙성을 이용하여 수학외적 문제해결하기

(ⅰ) n이 홀수인 경우 $a_n=(n+2)^2-2(n+2)+1$

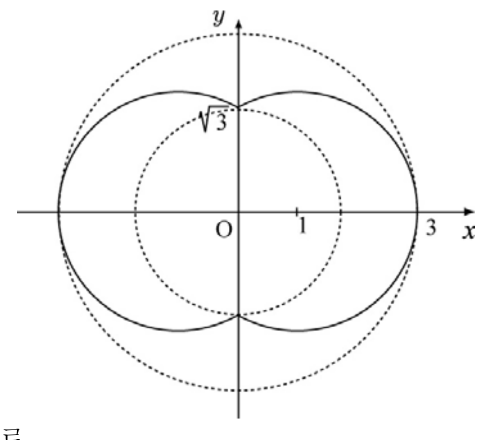
$n=2k-1$ 이면 $a_{2k-1}=4k^2$

(ⅱ) n이 짝수인 경우 $a_n=(n+2)^2-2(n+2)$

$n=2k$ 이면 $a_{2k}=4k^2+4k$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(8k^2+4k)=500$$

21. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기



역행렬이 존재하지 않으므로

$|x|^2-2|x|+y^2-3=0$

$(|x|-1)^2+y^2=4$
$x^2+y^2=k$라 하면 중심이 원점이고 반지름의
길이가 $\sqrt{k}$인 원을 나타내므로
$x=0,\ y=\pm\sqrt{3}$일 때, $k=3$
$x=\pm 3,\ y=0$일 때, $k=9$
$3 \le k \le 9$이므로 최댓값은 9, 최솟값은 3
$\therefore M+m=12$

22. [출제의도] 행렬 계산하기
$(A-B)C=\left\{\begin{pmatrix}1&4\\5&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 21이다.

23. [출제의도] 극한값 계산하기
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{4n^2+1}}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1-\frac{2}{n}}=2$$

24. [출제의도] 수열의 정의 이해하기
$f(1)=2,\ f(n+1)=g(f(n))=f(n)+3$
$f(n+1)-f(n)=3$ 이므로
$f(n)=2+3(n-1)=3n-1$
$\therefore\ f(100)=299$

25. [출제의도] 로그방정식 이해하기
$\log_2\sin\theta\cos\theta = -4,\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$
$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{8}$
$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)^2=\log_2 x-4$이므로
$\log_2\frac{9}{8}=\log_2\frac{x}{16}$
$\therefore\ x=18$

26. [출제의도] 등비수열의 성질 이해하기
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면,
$a_3=\alpha r^2=\alpha+12$
$a_5=\alpha r^4=\alpha+72$
$\alpha r^4-\alpha=\alpha(r^2+1)(r^2-1)=12(r^2+1)=72$
따라서 $r^2=5,\ \alpha=3$이다.
$a_7=\alpha r^6=375$

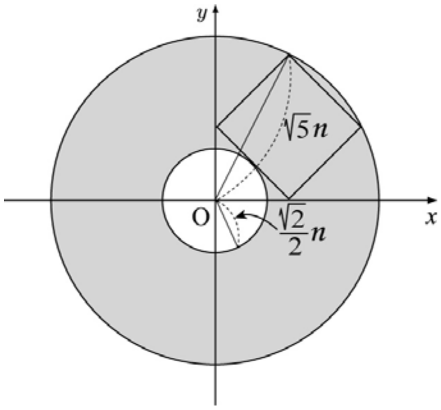
27. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기
k,n,α가 방정식의 세 근이므로
$(x-k)(x-n)(x-\alpha)=0$
$x^3-(k+n+\alpha)x^2+(kn+n\alpha+k\alpha)x-kn\alpha=0$
이때, 지표가 n이므로 $k=n+1$
$k+n+\alpha=2n+1+\alpha=7+\frac{1}{4}$

$n=3,\ k=4,\ \alpha=\frac{1}{4}$ ($\because$ n은 정수)

$p=kn\alpha=3\ \ \therefore p+k=7$

28. [출제의도] 도형을 이용하여 수학내적 문제해결하기

원점에서 점 $(n,\ 2n)$까지의 거리는 $\sqrt{5}\,n$이므로 사각형이 지나간 부분은 그림과 같다.



$a_n=5n^2\pi-\frac{1}{2}n^2\pi=\frac{9}{2}n^2\pi$

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{9}{2}\pi\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\frac{9\pi n(n+1)(2n+1)}{12}$

$=15$

29. [출제의도] 무한급수를 이용하여 수학내적 문제해결하기

$S_n=\{1+2+3+\ \cdots\ +(2^n-1)+2^n\}$

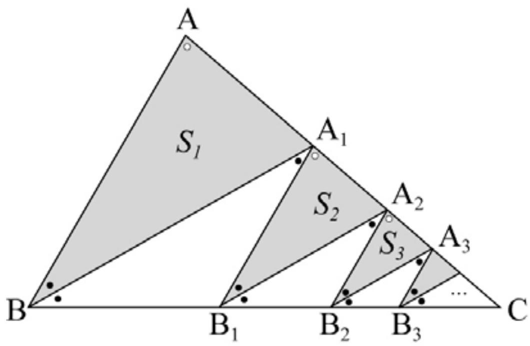
$\quad -\{2+4+6+\ \cdots+(2^n-2)+2^n\}$

$=\frac{2^n(1+2^n)}{2}-\frac{2^{n-1}(2+2^n)}{2}$

$=2^{n-1}(2^n-2^{n-1})=4^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{S_n}=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$

30.[출제의도] 도형의 규칙성을 이용하여 수학내적 문제해결하기



$\overline{\mathrm{AB}} \,//\, \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$이므로

$\triangle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{A}_n \backsim \triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$이다. ……①

이때, $\triangle \mathrm{BB}_1\mathrm{A}_1$은 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BB}_1} = \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} = x$라 하면 $4:6 = x:(6-x)$이므로 $x = \dfrac{12}{5}$이다. ……②

①, ②에 의하여

$\triangle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{A}_n$, $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$의 닮음비는

$4 : \dfrac{12}{5} = 1 : \dfrac{3}{5}$이므로 $S_n : S_{n+1} = 1 : \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$이다.

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}} = 2 \times 4 \times \dfrac{3}{5} \times \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{12\sqrt{3}}{5}$

$S_1 = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{12\sqrt{3}}{5} \times \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{12\sqrt{3}}{5}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\therefore p + q = 19$