제 2 교시

수리 영역 (가형)

성명		수험 번호						2				

○ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $(\sqrt{2})^6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

2. 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열의 제 7항은? [2점]

① 184 ② 186 ③ 188 ④ 190 ⑤ 192

3. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-A^{-1}$은? [2점]

① $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}-2&1\\0&4\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}-2&4\\2&2\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$

4. $2^x=3$, $3^y=5$일 때, 2^{xy}의 값은? [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

5. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^2=2A-E$, $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$를 만족할 때, 행렬 $A^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$은? [3점]

① $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=15$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^n}{3^n+5^{n+1}}a_n$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 세 수 $\mathrm{A}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\mathrm{B}=\sqrt[4]{\frac{1}{6}}$, $\mathrm{C}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{15}}}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

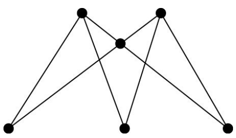
① $\mathrm{A}<\mathrm{B}<\mathrm{C}$ ② $\mathrm{A}<\mathrm{C}<\mathrm{B}$ ③ $\mathrm{B}<\mathrm{A}<\mathrm{C}$
④ $\mathrm{B}<\mathrm{C}<\mathrm{A}$ ⑤ $\mathrm{C}<\mathrm{A}<\mathrm{B}$

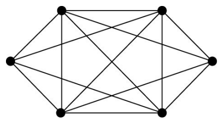
8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\log(n+1)-\log n$이다. $\sum_{k=50}^{m}a_k=\log\frac{49}{25}$일 때, m의 값은? [3점]

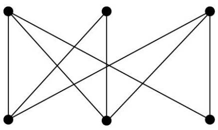
① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

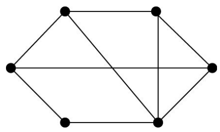
9. 다음 행렬이 나타내는 그래프는? [3점]

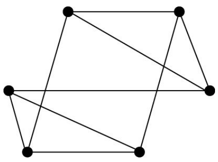
$$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

①


②


③


④


⑤


10. 집합 $M=\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, a,\ b \text{는 } 0\text{이 아닌 실수} \right\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $A \in M$, $B \in M$ 이면 $AB = BA$ 이다.

ㄴ. $A \in M$ 이고 행렬 C에 대하여 $AC = O$이면 $C = O$ 이다.

ㄷ. $A \in M$ 이고 $A^3 - A^2 - 2A = O$를 만족하는 행렬 A의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} = \frac{6}{7}$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공비는? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12. 과학전문 학술지에 '공룡의 속도 측정' 이라는 논문이 발표됐다. 이 논문에서는 중력가속도를 g, 공룡이 달릴 때의 보폭을 s, 공룡의 다리 길이를 h라 할 때, 공룡이 달리는 속도 v가 다음과 같다고 주장했다.

$$v = 0.25\, g^{0.5} s^{1.67} h^{-1.17}$$

위의 식을 이용하여 보폭이 8이고 다리 길이가 4인 공룡의 달리는 속도 v를 구할 때, $\log v^{1000}$의 값은? (단, 중력가속도 $g = 10$, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

① 601 ② 651 ③ 701 ④ 751 ⑤ 801

13. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}<2\sqrt{n}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=$ $\boxed{(가)}$ $<2=$(우변)이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt{k}$$

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-\boxed{(나)}$$

$$<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-\boxed{(나)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$$

이 때,

$\left(2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1\right)^2-\left\{2\sqrt{2}(k+1)\right\}^2$ $\boxed{(다)}$ 0 이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<2\sqrt{k+1}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 부등식은 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{k+1}$	$>$
②	$\frac{1}{2}$	$2\sqrt{k}$	$>$
③	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{k+1}$	$>$
④	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{k}$	$<$
⑤	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{k+1}$	$<$

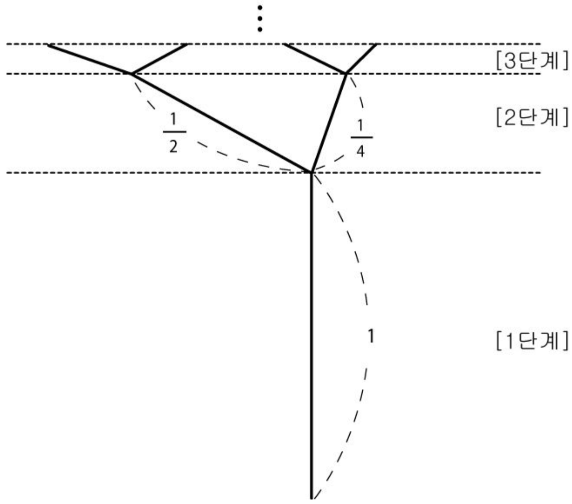
14. 한 평면 위에 다음과 같은 단계에 따라 선분들을 차례대로 그림과 같이 그려 나간다.

[1단계]: 길이가 1인 선분을 그린다.

[2단계]: [1단계]에서 그린 선분의 길이의 $\frac{1}{2}$만큼 왼쪽에, $\frac{1}{4}$만큼 오른쪽에 [1단계]에 그려진 선분에 붙여 그린다.

[3단계]: [2단계]에서 그린 각 선분의 길이의 $\frac{1}{2}$만큼 왼쪽에, $\frac{1}{4}$만큼 오른쪽에 [2단계]에 그려진 선분에 붙여 그린다.

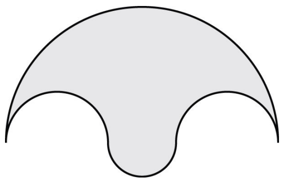
⋮



이와 같은 과정을 계속하여 [n 단계]에서 그린 선분들의 길이의 합을 a_n이라 하자. 이 때, a_{10}의 값은? [4점]

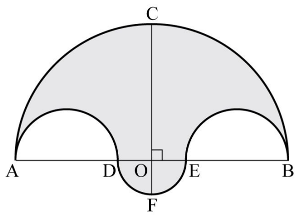
① $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$ ③ $\left(\frac{4}{5}\right)^{9}$ ④ $\left(\frac{3}{4}\right)^{8}$ ⑤ $\left(\frac{4}{5}\right)^{8}$

15. [그림1]은 아르키메데스의 <보조정리집>에 있는 셀리논(Salinon)이라는 도형이다.



[그림1]

아르키메데스는 셀리논을 다음과 같은 방법으로 그렸다.



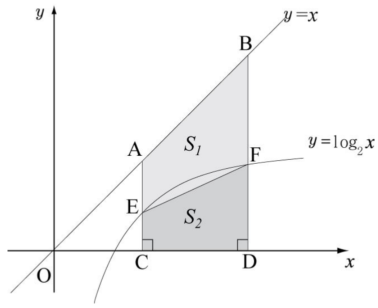
[그림2]

(ⅰ) 선분 AB를 지름으로 하는 반원 ACB를 그린다.
(ⅱ) 지름 AB 위에 A와 B로부터 각각 같은 거리만큼 떨어진 점 D, E를 잡는다.
(ⅲ) 선분 AD와 선분 EB를 지름으로 하는 두 개의 반원을 반원 ACB와 같은 쪽으로 그린다.
(ⅳ) 선분 DE를 지름으로 하는 반원을 반원 ACB와 반대쪽에 그린다.

[그림2]에서 $\overline{AB}=10$이고, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{CF}$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 이 셀리논의 넓이는? (단, $\overline{AO}=\overline{BO}$, $\overline{CF}$는 $\overline{AB}$의 수직이등분선) [4점]

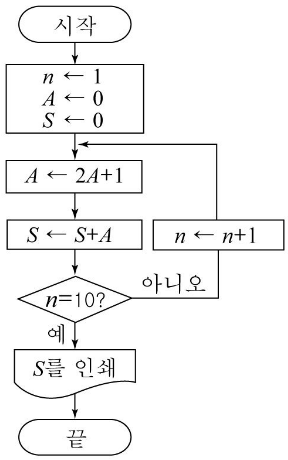
① 7π 　② $\frac{15}{2}\pi$ 　③ 8π 　④ $\frac{17}{2}\pi$ 　⑤ 9π

16. 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, a)$, $\mathrm{B}(b, b)$에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고, 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. □AEFB의 넓이 S_1과 □ECDF의 넓이 S_2의 비가 $4:3$이고 $a+b=7$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>1$) [4점]



① 35 　② 33 　③ 31 　④ 29 　⑤ 27

17. 다음 순서도에 의하여 인쇄되는 S의 값은? [4점]



① 2036 　② 2046 　③ 2056 　④ 2066 　⑤ 2076

18. 함수 $f(x)=2^{|x|}$ 일 때, x에 대한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 모든 실근의 합은? [4점]

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

19. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,f(x)+f(y)=1\}$일 때, 양의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

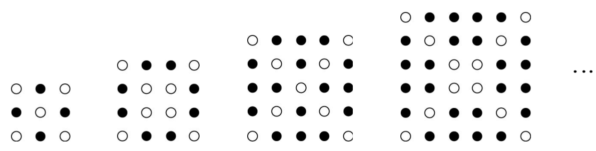
ㄱ. $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)\in S$

ㄴ. $\left(a,\ \dfrac{1}{b}\right)\in S$이면 $\left(b,\ \dfrac{1}{a}\right)\in S$

ㄷ. $\left(a,\ \dfrac{1}{b}\right)\in S$이고 $\left(b,\ \dfrac{1}{c}\right)\in S$이면 $\left(a,\ \dfrac{1}{c}\right)\in S$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 대각선에는 흰색 바둑돌을, 나머지에는 검은색 바둑돌을 정사각형 모양으로 놓는다.



[1단계]　[2단계]　[3단계]　[4단계]　…

이와 같은 방법으로 계속하여 바둑돌을 놓을 때, [n단계]에 놓인 바둑돌 중 검은색 바둑돌의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 460　　② 480　　③ 500　　④ 520　　⑤ 540

21. 행렬 $\begin{pmatrix} |x|-2 & \sqrt{3}+y \\ \sqrt{3}-y & |x| \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 실수 $x,\ y$에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타낼 때, x^2+y^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

단답형(22~30)

22. 세 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A-B)C$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23. 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\sqrt{4n^2+1}}{n-2}$ 을 구하시오. [3점]

24. 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 두 함수 $f(n)$, $g(n)$이

$$f(1)=2,\quad g(n)=n+3,\quad f(n+1)=(g\circ f)(n)$$

을 만족할 때, $f(100)$의 값을 구하시오. [3점]

25. $\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$일 때, $\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\log_2 x-4)$를 만족하는 x의 값을 구하시오. [3점]

26. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

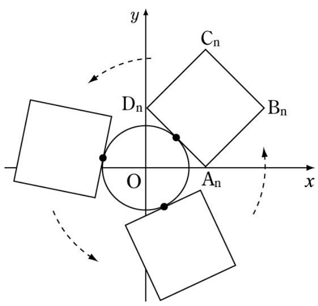
$$a_1=\alpha,\ a_3=\alpha+12,\ a_5=\alpha+72$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [4점]

27. 정수부분이 k자리인 양수의 상용로그의 지표와 가수가 각각 n, α이다. 방정식 $x^3-\dfrac{29}{4}x^2+\dfrac{55}{4}x-p=0$의 세 근이 k, n, α일 때, $p+k$의 값을 구하시오. [3점]

28. 좌표평면 위의 네 점 $A_n(n, 0)$, $B_n(2n, n)$, $C_n(n, 2n)$, $D_n(0, n)$을 연결한 사각형과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}n^2$이 있다. 그림과 같이 사각형 $A_nB_nC_nD_n$이 변 $\overline{A_nD_n}$의 중점에서 원에 접하며 원을 따라 한 바퀴 움직일 때, 사각형 $A_nB_nC_nD_n$이 지나간 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

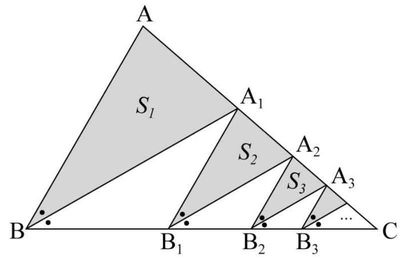
이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값을 구하시오. [4점]



29. 자연수 n에 대하여 2^n이하의 자연수 중에서 2^n과 서로소인 모든 자연수의 합을 S_n이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{S_n}$의 값을 구하시오. [4점]

30. $\angle B=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$인 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle B$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1이라 할 때, $\triangle ABA_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 A_1에서 $\overline{AB}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 B_1, $\angle A_1B_1C$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_2라 할 때, $\triangle A_1B_1A_2$의 넓이를 S_2라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $A_0=A$, $B_0=B$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.