2010학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	⑤	2	⑤	3	①	4	③	5	②
6	④	7	②	8	⑤	9	④	10	①
11	④	12	⑤	13	③	14	③	15	②
16	③	17	③	18	④	19	②	20	④
21	①	22	49	23	121	24	15	25	3
26	14	27	80	28	150	29	11	30	39

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용한 지수 계산하기

(준식) $= \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[3]{2}$

$= \sqrt[3]{6 \times 9 \div 2}$

$= \sqrt[3]{27} = 3$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈과 역행렬 구하기

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

3. [출제의도] 지수를 이용한 실수의 대소 관계 이해하기

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[9]{8} = 2^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$\sqrt[9]{8} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$ 이다.

4. [출제의도] 역함수의 정의를 알고 식의 최댓값 구하기

X에서 X로의 함수 f의 역함수가 g이므로 두 함수 f, g는 모두 일대일 대응이 된다.

즉, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$는 X의 원소 1, 2, 3, 4와 하나씩 대응된다.

따라서 $4g(1) + 3g(2) + 2g(3) + g(4)$ 의

최댓값은 $g(1) = 4$, $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(4) = 1$ 일 때 이므로 최댓값은 30이다.

5. [출제의도] 경우의 수 구하기

a	b	c	d

에서 a는 2,3,4,5,6 중에서, d는 0,2,4,6,8 중에서 택할 수 있다.

$\{2,3,4,5,6\} \cap \{0,2,4,6,8\} = \{2,4,6\}$ 이므로

i) $a \in \{2,4,6\}$ 이면 d는 4 가지

b, c는 ${}_{10-2}\mathrm{P}_2 = {}_8\mathrm{P}_2$ 이다.

그러므로 $3 \times 4 \times {}_8\mathrm{P}_2 = 672$

ii) $a \in \{3,5\}$ 이면 d는 5 가지

b, c는 ${}_8\mathrm{P}_2$ 이다.

그러므로 $2 \times 5 \times {}_8\mathrm{P}_2 = 560$

$\therefore 672 + 560 = 1232$

6. [출제의도] 지수함수를 이용하여 주어진 식의 값 구하기

점 H의 x좌표를 t라 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$이므로

$a^t = b^{2t} = 3$이다.

따라서 $b^t = \sqrt{a^t} = \sqrt{3}$ 이다.

그러므로 $\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{DH}}} = \dfrac{a^t - b^t}{b^t} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$이다.

7. [출제의도] 이차정사각행렬의 성질 중 참·거짓 찾기

ㄱ. [반례] $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이라 하면,

$AC = O$이므로 $AC = B$인 C가 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $A + B = E \Rightarrow A(A+B) = A \Rightarrow A^2 + AB = A$

$\therefore A^2 = -AB + A \cdots$ ①

$A + B = E \Rightarrow (A+B)B = B \Rightarrow AB + B^2 = B$

$\therefore B^2 = -AB + B \cdots$ ②

① − ② 에서 $A^2 - B^2 = A - B$ (참)

ㄷ. [반례] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이라 하면 $AB = E$ 이지만 $A + B = O$이므로 역행렬이 존재하지 않는다. (거짓)

8. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이용하여 방정식의 실근의 개수 구하기

n이 짝수이면 $\dfrac{2\pi}{3} < \theta < \dfrac{4\pi}{3}$에서 $2\cos\theta + 1 < 0$이므로 $a = 0$. $\dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$에서 $\cos\theta > 0$이므로 $2\cos\theta + 1 > 0$에서 $b = 2$이다. n이 홀수이면 θ에 관계없이 $c = 1$이다. $\therefore a + 2b + 3c = 0 + 4 + 3 = 7$

9. [출제의도] 지수방정식을 이용하여 문제 해결하기

$2^x = X$, $3^y = Y$ 로 치환하자.

연립방정식 $\begin{cases} 8X - \dfrac{1}{3}Y = k \cdots ① \\ \dfrac{1}{2}X + 9Y = 2 \cdots ② \end{cases}$ 가

$X > 0$, $Y > 0$인 근을 가지려면 ①의 직선이 ②의 직선의 X축과의 교점인 $(4, 0)$을 지날 때의 k값보다 작아야 하므로 k의 최댓값은 31 이다.

10. [출제의도] 지수법칙을 이용한 수학 외적 문제 해결하기

처음 농도를 $a\%$라 하자.

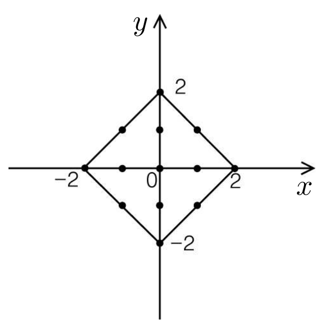
i) 첫 번째 방법: $p = a\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{10}$

ii) 두 번째 방법: $p = a\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)^{n}$

i), ii) 에서 $a\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{10} = a\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)^{n}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ $\quad \therefore n = 5$

11. [출제의도] 절댓값이 포함되어 있는 부등식의 영역 및 직선과 삼각형의 개수 구하기



ㄱ. 그림에서 점의 개수는 13 개다. (참)

ㄴ. 직선의 개수는 13 개의 점에서 두 점을 택하는 경우의 수이다. 일직선위에 있는 경우의 수는 중복되므로 ${}_{13}C_2 - (2 \times {}_5C_2 + 10 \times {}_3C_2) + 12 = 40$ 이다. (거짓)

ㄷ. 13 개의 점에서 세 점을 택하고 일직선 위에 있는 경우의 수는 제외한다.

${}_{13}C_3 - (2 \times {}_5C_3 + 10 \times {}_3C_3) = 256$ 이다. (참)

12. [출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 추론하기

ㄱ. $f(-x) = -f(x)$

$\Leftrightarrow -x|x| - px + q = -(x|x| + px + q)$

$\Leftrightarrow q = 0$ (참)

ㄴ. $p = 0$이면 $y = x|x|$의 그래프와 $y = -q$의 그래프는 항상 한 점에서 만나므로 실수해는 1개이다. (참)

ㄷ. $f(x) = x|x| + px + q = 0$에 대하여 $x|x| = -px - q$에서 $y = x|x|$와 $y = -px - q$의 그래프의 교점을 생각하면 p와 q에 따라서 많아야 세 점에서 만난다. (참)

13. [출제의도] 지수방정식의 해의 존재성 이해하기

$16 \times 3^{-x} + 3^{x+2} = 2a$ 에서 $3^x = t\,(t > 0)$ 라 하면,

$16t^{-1} + 9t = 2a$, $\quad 9t^2 - 2at + 16 = 0$

$t > 0$이고 두 근의 곱이 양수이므로 이 방정식이 단 하나의 해를 가진다면 양수인 중근을 가져야 하므로 (두 근의 합) $= \dfrac{2a}{9} > 0 \quad \therefore a > 0$

$\dfrac{D}{4} = a^2 - 9 \times 16 = 0$, $\quad a^2 = 144$

$\therefore a = 12$

14. [출제의도] 행렬의 성질을 이용한 참·거짓 찾기

ㄱ. $A, B \in M_0$이면 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$이므로

$AB = BA$이다. $\therefore C(A, B) = O$ (참)

ㄴ. $|k| \geqq 2$이면 임의의 $i, j = 1, 2$에 대하여 $i - j \neq k$ 이므로 $a_{ij} = 0$이다.

즉 $A \in M_k$이면 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ 뿐이다. (거짓)

ㄷ. $|k| < 2$이면 $k = 0, 1, -1$이다.

$k = 0$이면 ㄱ에 의해서 참.

$k = 1$이면 두 행렬

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$이므로 $AB = BA$이고

$k = -1$이면 $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로 $AB = BA$이다. $\therefore C(A, B) = O$ (참)

15. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 추론하기

$f(x) = x^2 + kx - 1$ 이라 할 때, $f(x) = 0$의 두 근이 γ, δ이므로

$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta)$

$= f(\alpha)f(\beta)$

$= (\alpha^2 + k\alpha - 1)(\beta^2 + k\beta - 1)$

$= \{(k+1)\alpha + k - 1\}\{(k+1)\beta + k - 1\}$

$= (k+1)^2\alpha\beta + (k+1)(k-1)(\alpha + \beta) + (k-1)^2$

$= -k(k^2 + 3)$ 이다.

16. [출제의도] 무리함수와 직선의 위치 관계 이해하기

$k \leq 0$이면 두 그래프는 항상 한 점에서 만난다.

$k > 0$일 때, $2kx = (x + 1 - k)^2$

$x^2 + 2(1 - 2k)x + (1 - k)^2 = 0$

$\dfrac{D}{4} = (1 - 2k)^2 - (1 - k)^2 < 0$

따라서 $0 < k < \dfrac{2}{3}$ 일 때, 두 그래프는 만나지 않는다.

17. [출제의도] 지수부등식의 해 구하기

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x-2)} < 2^{-g(x+1)}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x-2)} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{g(x+1)}$

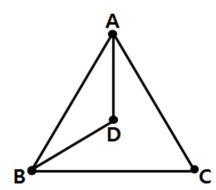
$f(x-2) > g(x+1) \Rightarrow x(x-3) > -x$

$\therefore x < 0$ 또는 $x > 2$

18. [출제의도] 행렬을 나타내는 그래프 구하기

주어진 행렬로 나타내어지는 그래프의 꼭짓점들을 각각 A, B, C, D 라 하면

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



19. [출제의도] 다항식을 이용한 참·거짓 찾기

ㄱ. $x^{10} - x + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$ 에서

$x^2 = -1$ 대입하면 $a = -1, b = 0$이다.

따라서 $R(x^{10} - x + 1) = -x$ (참)

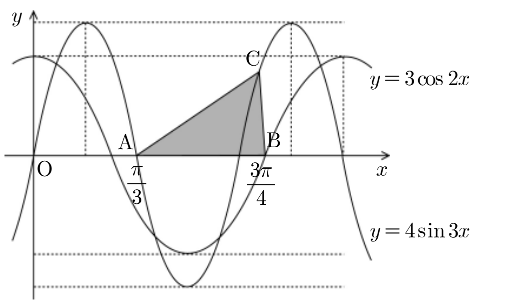
ㄴ. $x^2 = -1$ 대입하면

$R(x^9 + x + 1) = R(x^5 + x + 1) = 2x + 1$ 이다. (참)

ㄷ. $n = 4k + 3$(k는 자연수)이면

$x^n + x + 1 = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$ 에 $x^2 = -1$ 을 대입하면 $R(x^n + x + 1) = 1$이다. (거짓)

20. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기



$A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, $B\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ 이므로 $\overline{AB}=\frac{5\pi}{12}$ 이다. 점 P의 y좌표의 최댓값은 4 이므로 △ABP 의 넓이의 최댓값은 $\frac{5\pi}{6}$ 이다.

21. [출제의도] 복소수의 상등을 이용하여 문제 해결하기

$a+bi=\frac{x+i}{x-i}$ 이므로 $(x-i)(a+bi)=x+i$ 이다.

전개하면, $(a-1)x+b+(bx-(a+1))i=0$

$(a-1)x+b=0,\ bx-(a+1)=0$ 이고,

$x=\frac{-b}{a-1}=\frac{a+1}{b}$ 이므로

$a^2+b^2=1$ (단, $a\neq\pm1,\ b\neq0$) 이다.

[별해] $\frac{x+i}{x-i}=\frac{(x+i)^2}{(x-i)(x+i)}=\frac{x^2-1+2xi}{x^2+1}$

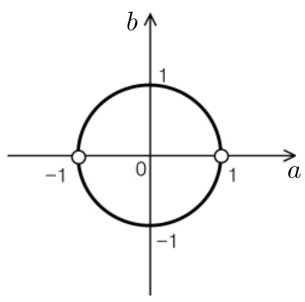
$=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1}i=a+bi$이므로,

복소수 상등에 의하여 $a=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $b=\frac{2x}{x^2+1}$이다.

따라서 $a^2+b^2=\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}+\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}=1$

이다. $b\neq0$이므로 $(1,0), (-1,0)$은 제외된다.

따라서 (a,b)의 영역은



이다.

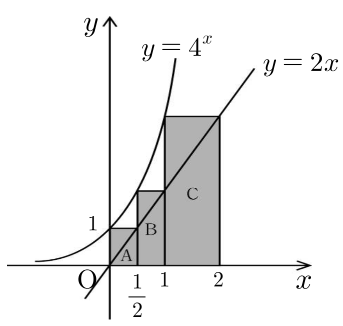
22. [출제의도] 행렬의 연산하기

$A+B=7E$ (단, E는 단위행렬)이므로,

$A^2+AB=A(A+B)=7A$

따라서, A^2+AB의 모든 성분의 합은 49 이다.

23. [출제의도] 지수함수 이해하기



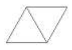
A의 넓이는 $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

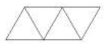
B의 넓이는 $2\times\frac{1}{2}=1$

C의 넓이는 $4\times1=4$

따라서 넓이의 합 $S=\frac{11}{2}$ 이므로 $4S^2=121$ 이다.

24. [출제의도] 경우의 수 구하기

 유형: 9개

 유형: 6개

따라서, 총 15개다.

25. [출제의도] 함수의 그래프를 이해하여 최댓값, 최솟값 구하기

$y=f(x-6)$는 $y=f(x)$를 x축의 양의 방향으로 6 만큼 평행 이동한 그래프이다.

$$g(x)=\begin{cases}6 & (x<0)\\ -\frac{3}{2}x+6 & (0\le x<6)\\ -3 & (x\ge 6)\end{cases}$$

이므로 최댓값 6 , 최솟값 -3 을 갖는다.

따라서 $M+m=3$이다.

26. [출제의도] 부등식을 만족하는 정수 추론하기

0 과 1 사이에 분모가 m인 분수는

$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \cdots, \frac{m-1}{m}$ 이다. 따라서

$\frac{1}{4}<\frac{1}{m}<\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{7}{2}<m<4$ 이 경우 만족하는 자연수 m은 없다.

$\frac{1}{4}<\frac{2}{m}<\frac{2}{7}\Rightarrow 7<m<8$ 이 경우 만족하는 자연수 m은 없다.

$\frac{1}{4}<\frac{3}{m}<\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{21}{2}<m<12$에서 $m=11$이다.

범위가 증가하므로 m은 점점 커진다. 따라서 최소인 것은 $m=11$이고 이때, $n=3$이다.

$\therefore\ m+n=14$

27. [출제의도] 접선의 방정식을 구하고 행렬을 이해하여 문제 해결하기

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $A(1,2)$에서의 접선의 방정식은 $x+2y=5$

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $B(2,-1)$에서의 접선의 방정식은 $2x-y=5$

연립방정식 $\begin{cases}x+2y=5\\2x-y=5\end{cases}$ 에서 $\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 M은 $\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$이다.

∴ 모든 성분의 합 $k=\frac{4}{5}$ 이므로 80 이다.

28. [출제의도] 부채꼴의 넓이 구하기

원의 반지름을 r라 하자. 점 A 에서 변 BC에 수선을 그으면 수선의 발이 점 D이다. 이 때, △ABD는 직각삼각형이고 △ACD는 직각이등변삼각형이다.

따라서, $r=2$ 이고, $\angle C=\frac{\pi}{4}$, $\angle A=\frac{5\pi}{12}$이다.

구하고자 하는 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times4\times\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{2}$

이다. 그러므로 $100k=100\times\frac{3}{2}=150$ 이다.

[별해] 원의 반지름의 길이를 r라 하면 △ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{6})^2=(2r)^2+(r+2\sqrt{3})^2-2\times2r\times(r+2\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$

이 식을 풀면 $r=\pm2$. $\therefore\ r=2$

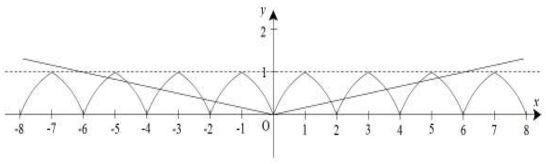
△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\angle C=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle A=\frac{5\pi}{12}$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$ $\therefore\ k=\frac{3}{2}$ 이므로 $100k=150$

29. [출제의도] 함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수 추론하기



위의 그림에서 교점은 11개이다.

30. [출제의도] 이차방정식에서 근과 계수와의 관계를 이해하여 문제 해결하기

$f(x)=x^2-ax+b=0$ 의 두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$이다.

$1\le\alpha\le9,\ 1\le\beta\le9$이므로 $2\le\alpha+\beta\le18$에서

$2\le a\le18$이다. 따라서 $a=5, 12$이다.

(i) $a=5$일 때, $f(x)=x^2-5x+b=0$의 두 근이 1 이상 9이하이므로 $D=25-4b\ge0$, $f(1)=-4+b\ge0$,

$f(9)=36+b\ge0$에서 $4\le b\le\frac{25}{4}$이다.

따라서 $b=6$이다.

$b=6$을 대입하면 $x^2-5x+6=0$에서 두 근이 2, 3 이므로 성립한다.

(ii) $a=12$일 때, $f(x)=x^2-12x+b=0$의 두 근이 1이상 9이하이므로 $D=12^2-4b\ge0$,

$f(1)=-11+b\ge0$, $f(9)=-27+b\ge0$에서

$27\le b\le36$이다. 따라서 $b=27, 34$이다.

$a=12, b=27$이면 $x^2-12x+27=0$에서 두 근이 3, 9 이므로 성립한다.

$a=12, b=34$이면 $x^2-12x+34=0$에서 두 근이 $6\pm\sqrt{2}$ 이므로 성립하지 않는다.

따라서 $(a,b)=(5,6), (12,27)$이다.

$\therefore\ a+b$의 최댓값은 39 이다.