2010학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	②	**2**	②	**3**	⑤	**4**	①	**5**	①
6	②	**7**	③	**8**	④	**9**	③	**10**	⑤
11	①	**12**	①	**13**	③	**14**	④	**15**	⑤
16	④	**17**	③	**18**	④	**19**	②	**20**	③
21	②	**22**	9	**23**	149	**24**	37	**25**	15
26	41	**27**	6	**28**	116	**29**	603	**30**	44

1. [출제의도] 행렬의 연산 이해하기

$2B = A - E$이므로 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$이다.

따라서 행렬 B의 모든 성분의 합은 2이다.

2. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \times 4\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3} = \sqrt{6}$

3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_2 \dfrac{2}{3} - \log_2 \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \log_2 8\sqrt{2}$

$= \log_2 \left(\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} \right) = 3$

4. [출제의도] 등비수열의 합 구하기

$f(f(0)) = f(2) = 2^{10} - 2^9 + \cdots + 2^2 - 2 + 2$

$= \dfrac{(-2)\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)} + 2 = \dfrac{2 \times 1023}{3} + 2$

$= 684$

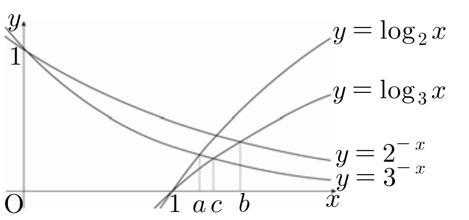
5. [출제의도] 무한등비수열의 극한값 이해하기

준식의 분모, 분자를 3^n으로 나누면

(준식)$= \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 6}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1} = \dfrac{0-6}{0+1} = -6$

6. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프의 관계 이해하기

지수함수와 로그함수의 그래프에서 $a < c < b$이다.



7. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$\mathrm{A}(a,\ \log_4 a)$, $\mathrm{B}(a,\ \log_{\frac{1}{4}} a)$,

$\mathrm{C}(a+2,\ \log_{\frac{1}{4}}(a+2))$,

$\mathrm{D}(a+2,\ \log_4(a+2))$이고

$\overline{\mathrm{AB}} = \log_4 a - \log_{\frac{1}{4}} a = 2\log_4 a = \log_2 a$

$\overline{\mathrm{CD}} = \log_4(a+2) - \log_{\frac{1}{4}}(a+2) = 2\log_4(a+2)$

$= \log_2(a+2)$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\{\log_2 a + \log_2(a+2)\} \times 2 = 3$

$\log_2 a(a+2) = 3$

$a(a+2) = 8$

따라서 $a = 2$ $(a > 1)$이다.

8. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

(가) $\dfrac{1}{3}$ (나) $\dfrac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$

(다) $\dfrac{1}{(m+3)!}$

9. [출제의도] 행렬의 그래프 이해하기

ㄱ. 행렬의 모든 성분의 합이 14이므로 변의 개수는 $\dfrac{14}{2} = 7$이다. (참)

ㄴ. C행의 성분의 합은 4이다. (거짓)

ㄷ. 그래프를 나타내는 행렬을 M이라고 할 때, 경로의 수는 M^2의 $(1, 3)$성분과 같으므로 2이다. (참)

10. [출제의도] 행렬의 연산법칙을 이용하여 추론하기

ㄱ. $A^2B + A^2 + B = O$에서

$(A^2+E)(B+E) = E$이므로 A^2+E의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $(A^2+E)(B+E) = E$이므로

$(A^2+E)(B+E) = (B+E)(A^2+E)$이다.

따라서 $A^2B = BA^2$이다. (참)

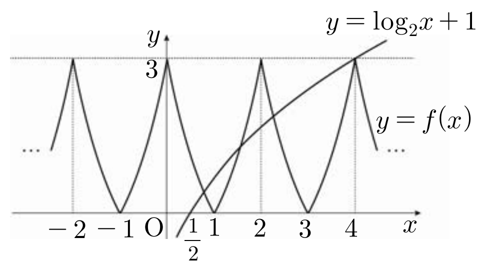
ㄷ. $A^2B = BA^2$에서 $A^2B^2 = BA^2B$

$= B(A^2B) = B(BA^2) = B^2A^2$이다. (참)

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 추론하기

함수 $f(x)$는 주기가 2인 함수이고, $y = f(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 그림과 같다.

$y = \log_2 x + 1$의 그래프는 두 점 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $(4, 3)$을 지나므로 $y = f(x)$의 그래프와 4개의 점에서 만난다.



12. [출제의도] 등차수열을 이용하여 실생활 문제 해결하기

다섯 사람에게 지급된 성과급을 차례대로

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d, a+2d$라 하면

$(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 5a$

$= 900$(만원)

따라서 $a = 180$(만원)

$(a-2d) + (a-d) = \dfrac{1}{2}\{a + (a+d) + (a+2d)\}$

이므로

$4a - 6d = 3a + 3d$

$d = \dfrac{1}{9}a = \dfrac{1}{9} \times 180 = 20$(만원)

따라서 $a + 2d = 220$(만원)

13. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ. $\left[\dfrac{1}{2}\right] = 0$, $\left[-\dfrac{1}{2}\right] = -1$이므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2^0 + 2^{-1}}{2} = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$ (참)

ㄴ. x가 정수이고 $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$이므로

$f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2} \geq \sqrt{2^x \cdot 2^{-x}} = 1$

(단, 등호는 $x = 0$일 때 성립한다.) (참)

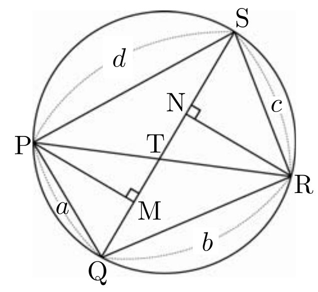
ㄷ. $1 < x < 2$, $-2 < x < -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \dfrac{2 + \frac{1}{4}}{2} = \dfrac{9}{8}$이다.

따라서 방정식의 해는 무수히 많다. (거짓)

14. [출제의도] 지수를 이용하여 실생활 문제 해결하기

$\dfrac{300}{900} = \left(\dfrac{3}{81}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$이므로 $\gamma = \dfrac{3}{2}$이다.

15. [출제의도] 행렬의 성질 이해하기



ㄱ. $\angle\mathrm{QPS} = \theta$라 하면,

$\triangle\mathrm{PQS} - \triangle\mathrm{QRS} = \dfrac{1}{2}ad\sin\theta - \dfrac{1}{2}bc\sin(\pi - \theta)$

$= \dfrac{1}{2}ad\sin\theta - \dfrac{1}{2}bc\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}(ad - bc)\sin\theta$

$= 0\ (ad - bc = 0)$

(참)

ㄴ. 두 점 P, R에서 대각선 QS에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하면

$\triangle\mathrm{PQS} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{QS}} \cdot \overline{\mathrm{PM}}$,

$\triangle\mathrm{QRS} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{QS}} \cdot \overline{\mathrm{RN}}$이므로 $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{RN}}$이다.

한편, 두 $\triangle\mathrm{PMT}$, $\triangle\mathrm{RNT}$에서

$\angle\mathrm{PTM} = \angle\mathrm{RTN}$, $\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{RN}}$,

$\angle\mathrm{MPT} = \angle\mathrm{NRT}$이다.

따라서 $\triangle\mathrm{PMT} \equiv \triangle\mathrm{RNT}$이다.

그러므로 $\overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{RT}}$이다. (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{RT}}$이므로 $M_1 = M_2$이고 $M_3 = M_4$이다.

$M_1M_4 - M_2M_3 = M_2M_4 - M_2M_4 = 0$

이므로 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

16. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

$\log x = 2 + \alpha$ $(0 \leq \alpha < 1)$라 하면

$\log \sqrt[3]{x^2} = \dfrac{2}{3}\log x = \dfrac{2}{3}(2 + \alpha) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\alpha$

$= 1 + \dfrac{2\alpha + 1}{3}$

이다.

$\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2\alpha + 1}{3} < 1$이므로 $\log \sqrt[3]{x^2}$의 가수는 $\dfrac{2\alpha + 1}{3}$이다.

따라서 $\alpha + \dfrac{2\alpha + 1}{3} = 1$이므로 $\alpha = \dfrac{2}{5}$이다.

그러므로 $\log x^5 = 5\left(2+\dfrac{2}{5}\right)=12$

17. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

두 점 $\mathrm{S}_n, \mathrm{T}_n$의 좌표를 자연수 n에 대하여 나타내면

$\mathrm{S}_n(a_n,\ b_n)=\mathrm{S}_n\left(\dfrac{2n}{n^2+1},\ \dfrac{2n^2}{n^2+1}\right)$

$\mathrm{T}_n(c_n,\ d_n)=\mathrm{T}_n\left(\dfrac{2}{n},\ 2\right)$이다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}=2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n-a_n}{d_n-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{2n}{n^2+1}}{2-\dfrac{2n^2}{n^2+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{n(d_n-b_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}}{n\left(2-\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right)}=1$

(참)

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이해하기

$a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=2,\ \cdots$

이므로 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$이고

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=10$이다.

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{2010}a_k=502\times(2+1+3+4)+2+1$

$=502\times10+2+1=5023$

19. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

(가) K (나) $a_{n-1}-K$ (다) $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

20. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 문제 해결하기

D_n에서 새로 만들어진 원의 개수를 a_n이라 하면

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이다.

$a_n=2^{n+1}-3$이고

D_1에 있는 원의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$, D_1에서 새로 만들어진

D_2에 있는 한 개의 내접원의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4^2}$, $\cdots$

D_{n-1}에서 새로 만들어진 D_n에 있는 한 개의 내접원의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4^n}$이므로

D_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$S_n=(2^2-3)\cdot\dfrac{\pi}{4}+(2^3-3)\cdot\dfrac{\pi}{4^2}$

$+\cdots+(2^{n+1}-3)\cdot\dfrac{\pi}{4^n}$

이다.

따라서 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{(2^{k+1}-3)\cdot\dfrac{\pi}{4^k}\right\}$

$=\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}-\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\pi}S_n=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{1}{4}}=1$

21. [출제의도] 지수방정식의 문제 해결하기

서로 다른 두 근이 모두 양수이므로 $2^x=t$라 하면

$t>1$이다.

$t^2-(a+6)t-2a(a-6)=0$

$(t-2a)(t+a-6)=0$에서

$t=2a$ 또는 $-a+6$

$2a>1,\ -a+6>1$

$2a\neq-a+6$이므로 $a\neq2$이고

따라서 $\dfrac{1}{2}<a<5,\ a\neq2$

그러므로 정수 a는 1, 3, 4이므로 3개이다.

22. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$2^{\frac{1}{7}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{2n-1}{7}}=2^{\frac{1}{7}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}=2^{\frac{n^2}{7}}>2^{10}$

이므로 $\dfrac{n^2}{7}>10$이다.

따라서 $n^2>70$이므로 만족시키는 양의 정수 n의 최솟값은 9이다.

23. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 구하기

$\sum\limits_{k=1}^{20}\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{20}\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{41}-\dfrac{1}{43}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{43}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{40}{129}=\dfrac{20}{129}=\dfrac{q}{p}$

따라서 $p+q=149$

24. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 성질을 이해하기

$A(4E-A)=E$이므로 $(4E-A)^{-1}=A$이다.

따라서 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(4E-A)^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\13\end{pmatrix}$

그러므로 $\alpha+2\beta=37$

25. [출제의도] 무한급수의 수렴을 이해하기

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2a_n-3)$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2a_n-3)=0$

이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=3$

(준식)$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{20n^2a_n+\dfrac{3}{n}}{n^2a_n+1}=\dfrac{60}{3+1}=15$

26. [출제의도] 행렬을 이용하여 연립일차방정식의 문제 해결하기

연립일차방정식으로 나타내면

$\begin{cases}x+y=19\\3x+4y=72\end{cases}$ ⋯⋯ ㉠

이다. ㉠을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\72\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\72\end{pmatrix}$

따라서 $10a+b=41$

27. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 문제 해결하기

$S=1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots+11\cdot3^5$ ⋯⋯ ㉠

$3S=3+3\cdot3^2+\cdots+9\cdot3^5+11\cdot3^6$ ⋯⋯ ㉡

㉠−㉡하면

$-2S=1+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^5-11\cdot3^6$

$=1+2\cdot\left\{\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}\right\}-11\cdot3^6$

$S=1+5\cdot3^6$

따라서 $\log_3\dfrac{S-1}{5}=6$

28. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 이해하기

n은 두 자리의 자연수이므로 $f(n)=1$이고

$\log n=1+\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$\log2n=1+\log2+\alpha$이다.

(i) $0\le\log2+\alpha<1$인 경우 $f(2n)=1$이므로

$10\le n\le49$이고, $\log3n-1<\log2$에서

$3n<20$이다. 따라서 두 자리의 자연수 n은 없다.

(ii) $1\le\log2+\alpha$인 경우 $f(2n)=2$이므로

$50\le n\le99$이고 $\log3n-2<\log2$에서

$3n<200$이다.

따라서 $50\le n<\dfrac{200}{3}$이 되어 만족시키는 자연수 n의 범위는 $50\le n\le66$이다.

그러므로 최댓값과 최솟값의 합은 116이다.

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1=p,\ a_2=q$이므로 $a_3=q-p,\ a_4=-p,$

$a_5=-q,\ a_6=p-q,\ a_7=p,\ a_8=q,\ \cdots$이다.

자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이고

$\sum\limits_{k=1}^{6}a_k=0$이므로 $\sum\limits_{k=1}^{100}a_k=2q-p,$

$\sum\limits_{k=1}^{200}a_k=p+q$이다. $\sum\limits_{k=1}^{100}a_k=\sum\limits_{k=1}^{200}a_k$에서

$q=2p$이고 $a_{39}=a_3=q-p=p=201$이다.

따라서 $p=201,\ q=402$이다.

그러므로 $p+q=603$이다.

30. [출제의도] 등차수열을 이용하여 문제 해결하기

표의 3행 3열의 수를 a라 하면 등차중항에 의하여 표는 아래와 같다.

	1열	2열	3열	4열	5열
1행	0				
2행	$a-37$		27		
3행	$2a-74$		a		74
4행	$109-2a$	41	$2a-27$		
5행					

$(a-37)+(109-2a)=2(2a-74)$

따라서 $a=44$