수리 영역 (가 형)

제 2 교시 | 성명 | | 수험 번호 | 2 | **1**

○ 자신이 선택한 유형(‘가’형 / ‘나’형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 B가 $A-2B=E$를 만족시킬 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.) [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2. $\dfrac{\sqrt{27}}{4}\times 2^{\frac{5}{2}}\times\dfrac{1}{3}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$　② $\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{6}$

3. $\log_2\dfrac{2}{3}-\log_2\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\log_2 8\sqrt{2}$의 값은? [2점]

① 1　② $\log_2 3$　③ 2　④ $\log_2 6$　⑤ 3

4. 함수 $f(x)=x^{10}-x^9+x^8-x^7+\cdots+x^2-x+2$일 때, $(f\circ f)(0)$의 값은? [3점]

① 684　② 696　③ 708　④ 720　⑤ 732

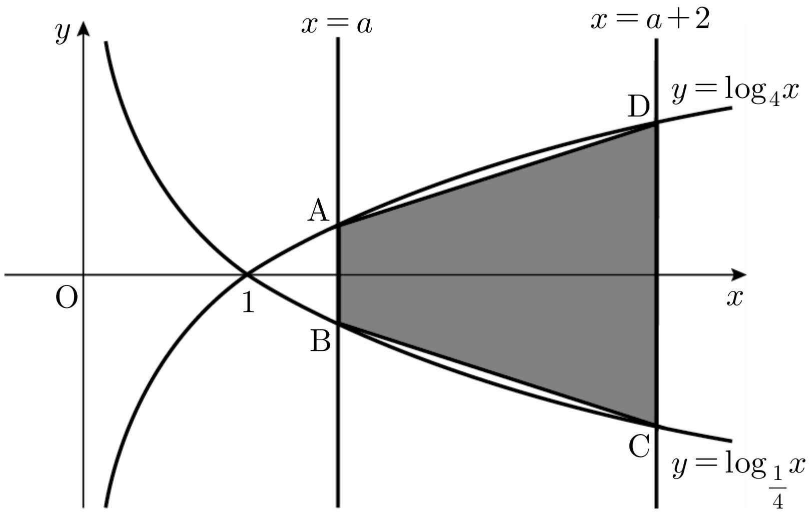
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2\cdot 3^{n+1}}{3\cdot 2^{n-1}+3^n}$의 값은? [3점]

① -6　② -2　③ $-\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{2}{3}$

6. $\left(\frac{1}{3}\right)^{a} = \log_{2}a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{b} = \log_{3}b$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{c} = \log_{3}c$ 일 때, 양수 a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $c<a<b$ ⑤ $c<b<a$

7. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_{4}x$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$와 두 직선 $x=a$, $x=a+2$가 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 사각형 ABCD의 넓이가 3일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$) [3점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

8. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(ⅰ) $n=1$ 일 때, (좌변)$=\boxed{(가)}$, (우변)$=\boxed{(가)}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ⅱ) $n=m$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}$$

이다.

$n=m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}+\boxed{(나)}$$

$$=\frac{1}{2}-\boxed{(다)}$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{(m+2)\cdot m!}$	$\frac{1}{(m+2)!}$
②	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$	$\frac{1}{(m+3)!}$
③	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{(m+2)\cdot m!}$	$\frac{1}{(m+2)!}$
④	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$	$\frac{1}{(m+3)!}$
⑤	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$	$\frac{1}{(m+2)!}$

9. 다음은 5개의 꼭짓점이 A, B, C, D, E인 그래프를 행렬로 나타낸 것이다.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 변의 개수는 7이다.
ㄴ. 꼭짓점 C에 연결된 변의 개수는 3이다.
ㄷ. 꼭짓점 A에서 꼭짓점 C로 가는 두 개의 변으로 구성된 경로의 수는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $A^2B+A^2+B=O$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. A^2+E의 역행렬이 존재한다.
ㄴ. $A^2B=BA^2$
ㄷ. $A^2B^2=B^2A^2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.
(나) $f(x)=\begin{cases} 4^{-x+1}-1 & (0 \le x < 1) \\ 4^{x-1}-1 & (1 \le x < 2) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프와 만나는 점의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

12. 어느 회사의 대리점은 다섯 명의 영업사원들에게 성과급으로 900만원을 차등 지급하였다. 각자에게 지급된 성과급은 등차수열을 이루고, 가장 적은 금액을 받은 사람과 그 다음으로 적은 금액을 받은 사람의 성과급의 합은 나머지 세 사람이 받은 성과급의 합의 $\frac{1}{2}$이다. 가장 많은 금액을 받은 사람의 성과급이 x만원일 때, x의 값은? [3점]

① 220 ② 230 ③ 240
④ 250 ⑤ 260

13. 함수 $f(x)=\dfrac{2^{[x]}+2^{[-x]}}{2}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

ㄴ. x가 정수이면 $f(x)\ge 1$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=\dfrac{9}{8}$의 해의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 기체의 압력이 P_0일 때 온도가 T_0이고 압력이 P일 때 온도가 T이면 온도와 압력의 관계는

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

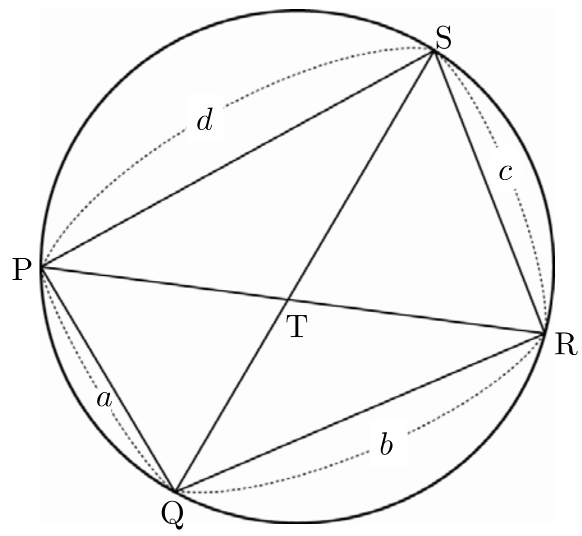
이다. (단, γ는 비열비이고, 압력의 단위는 atm, 온도의 단위는 K이다.)
표는 어떤 기체의 압력에 따른 온도를 나타낸 것이다.

압력(atm)	온도(K)
$P_0=81$	$T_0=900$
$P=3$	$T=300$

이때, 이 기체의 비열비 γ의 값은? [3점]

① $\dfrac{6}{5}$ ② $\dfrac{13}{10}$ ③ $\dfrac{7}{5}$
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{8}{5}$

15. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 PQRS의 두 대각선 PR와 QS가 만나는 점을 T라 하고, $\overline{\mathrm{PQ}}=a$, $\overline{\mathrm{QR}}=b$, $\overline{\mathrm{RS}}=c$, $\overline{\mathrm{SP}}=d$라 하자. 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈보 기〉

ㄱ. △PQS와 △QRS의 넓이가 같다.

ㄴ. $\overline{\mathrm{PT}}=\overline{\mathrm{RT}}$

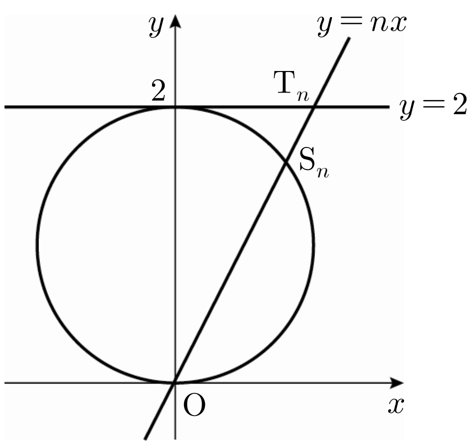
ㄷ. △PQT, △QRT, △RST, △SPT의 넓이를 각각 M_1, M_2, M_3, M_4라 할 때, 행렬 $\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. $\log x$의 지표가 2이고 $\log x$와 $\log \sqrt[3]{x^2}$의 가수의 합이 1일 때, $\log x^5$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

17. 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx$가 원 $x^2+(y-1)^2=1$, 직선 $y=2$와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 $\mathrm{S}_n(a_n,\, b_n)$, $\mathrm{T}_n(c_n,\, d_n)$이라 하자.



극한값이 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=2$

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n-a_n}{d_n-b_n}=1$

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{n\left(d_n-b_n\right)}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=2,\ a_{n+1}=(8a_n\text{을 5로 나눈 나머지})\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

를 만족시킬 때, $\sum\limits_{k=1}^{2010} a_k$의 값은? [3점]

① 5012 ② 5013 ③ 5022
④ 5023 ⑤ 5026

19. 다음은 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 양의 상수 K에 대하여

$$a_1 \ge K,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

$a_n>0,\ K>0$이고, $a_1 \ge K$이므로

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{K^2}{a_n}\right) \ge \boxed{(가)}$ 이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \ge \boxed{(가)}$ …… ㉠

이다.

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{K^2}{a_n}\right)$이므로

2이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{K^2}{a_{n-1}}\right)$이다.

$a_n-K=\dfrac{1}{2}\left(a_{n-1}+\dfrac{K^2}{a_{n-1}}\right)-K$

$=\dfrac{1}{2}\left(\boxed{(나)}\right)\left(1-\dfrac{K}{a_{n-1}}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(\boxed{(나)}\right)$

이 성립하므로

$a_n-K \le \dfrac{1}{2}\left(\boxed{(나)}\right) \le \cdots \le \boxed{(다)}\left(a_1-K\right)$ …… ㉡

이다.

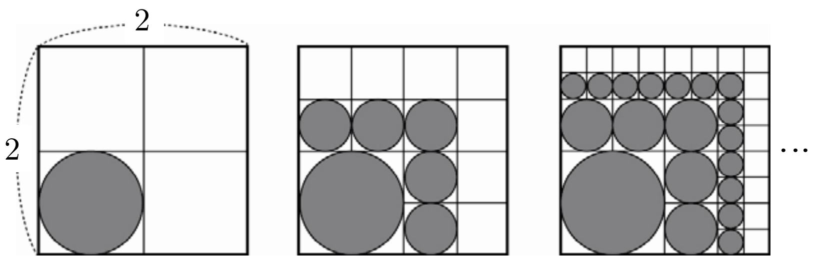
㉠, ㉡에 의하여 $0 \le a_n-K \le \boxed{(다)}\left(a_1-K\right)$이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\boxed{(가)}$ 이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	K	$a_{n-1}-K$	$\dfrac{1}{2^{n+1}}$
②	K	$a_{n-1}-K$	$\dfrac{1}{2^{n-1}}$
③	K	$a_{n-1}+K$	$\dfrac{1}{2^{n}}$
④	$2K$	$a_{n-1}-K$	$\dfrac{1}{2^{n-1}}$
⑤	$2K$	$a_{n-1}+K$	$\dfrac{1}{2^{n}}$

20. 아래와 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 이 중 한 개의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_1이라 하고, 이 내접원의 넓이를 S_1이라 하자.
D_1에서 내접원이 없는 나머지 정사각형을 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 새로 만들어진 정사각형 중에서 내접원이 있는 정사각형과 인접한 각각의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_2라 하고, D_2에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.
D_2에서 내접원이 없는 나머지 정사각형을 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 새로 만들어진 정사각형 중에서 내접원이 있는 정사각형과 인접한 각각의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_3이라 하고, D_3에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 D_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}S_n$의 값은? [4점]



D_1 D_2 D_3 …

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

21. 지수방정식 $2^{2x}-(a+6)2^x-2a(a-6)=0$의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

단답형

22. 부등식 $2^{\frac{1}{7}}\times 2^{\frac{3}{7}}\times 2^{\frac{5}{7}}\times\cdots\times 2^{\frac{2n-1}{7}}>1024$를 만족시키는 양의 정수 n의 최솟값을 구하시오. [3점]

23. $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 이차정사각행렬 A가 $A^2-4A+E=O$, $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\13\end{pmatrix}$을 만족시킨다. 연립일차방정식 $(4E-A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+2\beta$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.) [3점]

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n-3)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{20a_n+3n^{-3}}{a_n+n^{-2}}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 문항에 따라 배점이 3점 또는 4점인 어느 과목 시험에서 갑이 맞힌 문항의 개수는 19이고, 점수는 72이었다. 갑이 맞힌 3점 문항의 개수를 x, 4점 문항의 개수를 y라 할 때,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-1\\-3&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}19\\72\end{pmatrix}$$

가 성립한다.

이때, 상수 a, b에 대하여 $10a+b$의 값을 구하시오. [3점]

27. 그림과 같이 (6×6)개의 칸에 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5을 적어 넣었다. 모든 칸에 적힌 수들의 합을 S라 할 때, $\log_3\frac{S-1}{5}$의 값을 구하시오. [4점]

1	3	3^2	3^3	3^4	3^5
3	3	3^2	3^3	3^4	3^5
3^2	3^2	3^2	3^3	3^4	3^5
3^3	3^3	3^3	3^3	3^4	3^5
3^4	3^4	3^4	3^4	3^4	3^5
3^5	3^5	3^5	3^5	3^5	3^5

28. 자연수 n 에 대하여 $f(n)=(\log n$ 의 지표$)$ 일 때, 다음 두 조건을 만족시키는 n의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

(가) n은 두 자리의 자연수이다.
(나) $\log 3n - f(2n) < \log 2$

29. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = p,\ a_2 = q,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $a_{39} = 201$이고 $\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{200} a_k$이다.
이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 상수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 5행 5열로 이루어진 표에 네 개의 수가 적혀 있다. 각 행의 다섯 개의 수는 열의 순서대로, 각 열의 다섯 개의 수는 행의 순서대로 각각 등차수열을 이루도록 나머지 빈칸에 수를 적고자 한다. 3행 3열에 들어갈 수를 구하시오. [4점]

	1열	2열	3열	4열	5열
1행	0				
2행			27		
3행					74
4행		41			
5행					

※ 확인사항
문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.