제 2 교시

수리 영역(나 형)

1. $\log_2 9 \cdot \log_3 \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}}{2 \cdot 7^n + 3}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

3. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $X + B = AB$ 를 만족시키는 행렬 X는? [2점]

① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

4. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B|A) = \frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{18}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 2^n$ 일 때, $a_1 + a_5$의 값은? [3점]

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

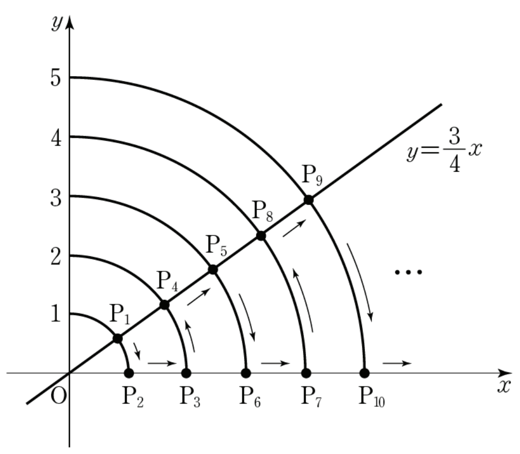
6. 어느 도시의 중심온도 u(℃), 근교의 농촌온도 r(℃), 도시화된 지역의 넓이 $a(\mathrm{km}^2)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$u = r + 0.65 + 1.6\log a$$

10년 전에 비하여 이 도시의 도시화된 지역의 넓이가 25% 확장되었고 근교의 농촌온도는 변하지 않았을 때, 도시의 중심온도는 10년 전에 비하여 x℃ 높아졌다. x의 값은? (단, 도시 중심의 위치는 10년 전과 같고, $\log 2$는 0.30으로 계산한다.) [3점]

① 0.12 ② 0.13 ③ 0.14 ④ 0.15 ⑤ 0.16

7. 다음 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1씩 증가하는 원들이 두 직선 $y=\frac{3}{4}x$, $y=0$과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1부터 시작하여 화살표 방향을 따라 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 으로 나타낸 것이다.



점 P_{25}의 x좌표는? [3점]

① $\frac{52}{5}$ ② 11 ③ $\frac{56}{5}$ ④ 12 ⑤ $\frac{64}{5}$

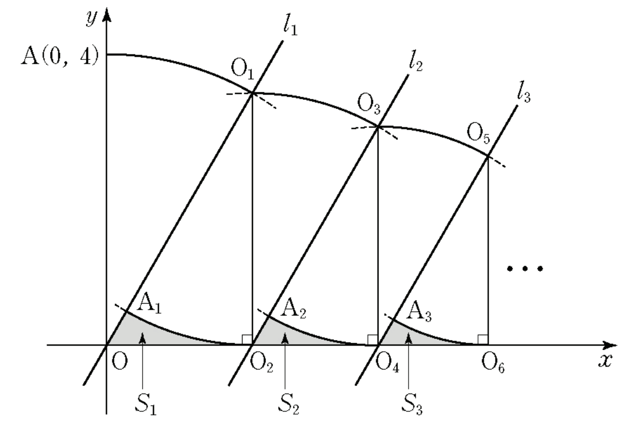
8. 어느 김밥 가게에서는 기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원으로 하고, 기본재료 외에 선택재료가 추가될 경우 다음 표에 따라 가격을 정한다. 예를 들어 맛살과 참치가 추가된 김밥의 가격은 1500원이다.

선택재료	가격(원)
햄	200
맛살	200
김치	200
불고기	300
치즈	300
참치	300

선택재료를 추가하였을 때, 가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류는 모두 몇 가지인가? (단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

9. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$가 있다.
점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_1을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}$, 선분 OO_2, 호 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.
점 O_2를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$를 반지름으로 하는 원이 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$과 만나는 점을 A_2라 하자. 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_2$, 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4$, 호 $\mathrm{O}_4\mathrm{A}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $4\sqrt{3}-2\pi$　② $8\sqrt{3}-4\pi$　③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$　⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

10. 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9장의 카드가 있다. 다음은 이 카드 중에서 동시에 3장을 선택할 때, 카드에 적힌 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다.

> 두 자연수 m, $n\,(2 \leqq m \leqq n)$에 대하여 1부터 n까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드에서 동시에 m장을 선택할 때, 카드에 적힌 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수를 $N(n,\ m)$이라 하자.
> 9장의 카드에서 3장의 카드를 선택할 때, 9가 적힌 카드가 선택되는 경우와 선택되지 않는 경우로 나누면 $N(9,\ 3)$에 대하여 다음 관계식을 얻을 수 있다.
>
> $$N(9,\ 3) = N(\boxed{(가)},\ 2) + N(8,\ 3)$$
>
> $N(8,\ 3)$에 8이 적힌 카드가 선택되는 경우와 선택되지 않는 경우로 나누어 적용하면
>
> $$N(9,\ 3) = N(\boxed{(가)},\ 2) + N(6,\ 2) + N(7,\ 3)$$
>
> 이다. 이와 같은 방법을 계속 적용하면
>
> $$N(9,\ 3) = \sum_{k=3}^{7} N(k,\ 2)$$
>
> 이다. 여기서
>
> $$N(k,\ 2) = \boxed{(나)} - (k-1)$$
>
> 이므로
>
> $$N(9,\ 3) = \boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	7	${}_{k}\mathrm{C}_{2}$	35
②	8	${}_{k+1}\mathrm{C}_{2}$	48
③	7	${}_{k}\mathrm{C}_{2}$	48
④	8	${}_{k}\mathrm{C}_{2}$	48
⑤	7	${}_{k+1}\mathrm{C}_{2}$	35

11. 어느 공항에는 A, B 두 대의 검색대만 있으며, 비행기 탑승 전에는 반드시 공항 검색대를 통과하여야 한다.
남학생 7명, 여학생 7명이 모두 A, B 검색대를 통과하였는데, A 검색대를 통과한 남학생은 4명, B 검색대를 통과한 남학생은 3명이다. 여학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 A 검색대를 통과한 여학생일 확률을 p라 하자.
B 검색대를 통과한 학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 남학생일 확률을 q라 하자.
$p=q$일 때, A 검색대를 통과한 여학생은 모두 몇 명인가?
(단, 두 검색대를 모두 통과한 학생은 없으며, 각 검색대로 적어도 1명의 여학생이 통과하였다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c $(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) $a+b+c$는 홀수이다.
(나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다.

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{17}{42}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{19}{42}$

13. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a_1>0$) [3점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 수렴한다.
ㄴ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$이 수렴한다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\right)$이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 k에 대하여

$$b_{2k-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}}$$
$$b_{2k}=2^{a_2+a_4+\cdots+a_{2k}}$$

을 만족시킨다. $\{a_n\}$은 등차수열이고,

$$b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{10}=8$$

일 때, $\{a_n\}$의 공차는? [4점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

15. 5보다 크고 50보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a^2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 28 ② 32 ③ 36 ④ 40 ⑤ 44

16. 한 개의 동전을 한 번 던지는 시행을 5번 반복한다. 각 시행에서 나온 결과에 대하여 다음 규칙에 따라 표를 작성한다.

> (가) 첫 번째 시행에서 앞면이 나오면 △, 뒷면이 나오면 ○를 표시한다.
>
> (나) 두 번째 시행부터
>
> (1) 뒷면이 나오면 ○를 표시하고,
>
> (2) 앞면이 나왔을 때, 바로 이전 시행의 결과가 앞면이면 ○, 뒷면이면 △를 표시한다.

예를 들어 동전을 5번 던져 '앞면, 뒷면, 앞면, 앞면, 뒷면'이 나오면 다음과 같은 표가 작성된다.

시행	1	2	3	4	5
표시	△	○	△	○	○

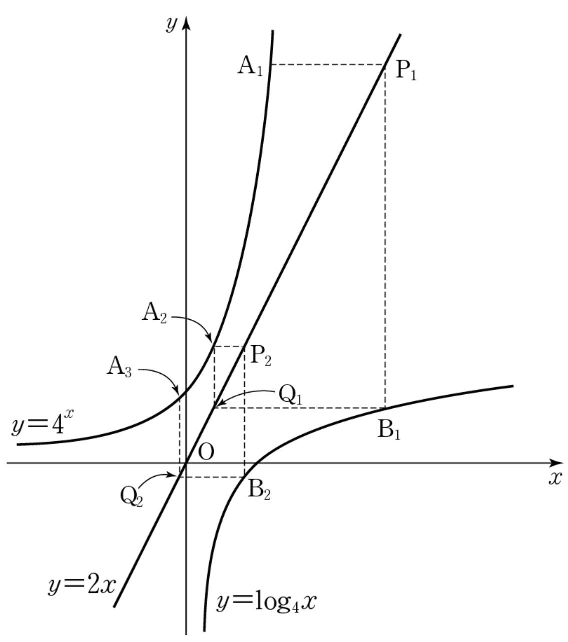
한 개의 동전을 5번 던질 때 작성되는 표에 표시된 △의 개수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{P}(X=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{13}{32}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{17}{32}$ ④ $\frac{19}{32}$ ⑤ $\frac{21}{32}$

17. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(a,\ 4^a)$이다.
>
> (나) (1) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 P_n이라 한다.
>
> (2) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
>
> (3) 점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
>
> (4) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은? [4점]



① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{11}{16}$ ③ $-\frac{5}{8}$ ④ $-\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

단답형

18. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+3A^{-1}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

19. 지수방정식 $6-2^x=2^{3-x}$의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

20. 로그부등식 $\log_3 x+\log_3(12-x) \leqq 3$ 을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오. [3점]

21. 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_5=2^8$, $a_8=2^5$을 만족시킬 때, $\sum_{n=9}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

22. 수열 $\{a_n\}$의 제n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다. $a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오. [4점]

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ p)$를 따르고,

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=5)$$

일 때, $\mathrm{E}(7X)$의 값을 구하시오. (단, $0<p<1$) [3점]

24. 좌표평면에서 세 점 (15, 4), (15, 1), (64, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [4점]

25. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^m = A^n$$

을 만족시키는 40 이하의 두 자연수 m, $n\,(m>n)$의 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오. [4점]

5지선다형

26. 양의 실수 전체의 집합에서 연산 $*$을

$$a*b=a^b\, b^{-\frac{a}{2}}$$

으로 정의하자. $(2*4)*x=8\,x^{-2}$일 때, x의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

27. 어느 회사에서는 생산되는 제품을 1000개씩 상자에 넣어 판매한다. 이때, 상자에서 임의로 추출한 16개 제품의 무게의 표본평균이 12.7 이상이면 그 상자를 정상 판매하고, 12.7 미만이면 할인 판매한다.

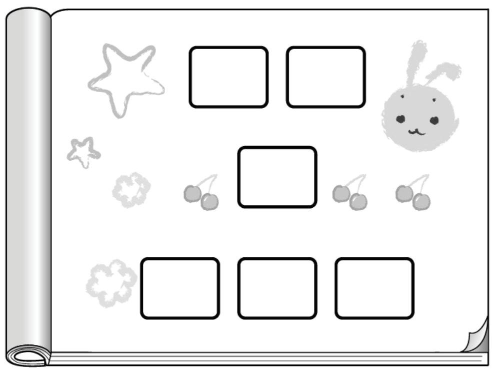
A 상자에 들어 있는 제품의 무게는 평균 16, 표준편차 6인 정규분포를 따르고, B 상자에 들어 있는 제품의 무게는 평균 10, 표준편차 6인 정규분포를 따른다고 할 때,

A 상자가 할인 판매될 확률이 p, B 상자가 정상 판매될 확률이 q이다. $p+q$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.6	0.4452
1.8	0.4641
2.0	0.4772
2.2	0.4861

① 0.0367　② 0.0498　③ 0.0587
④ 0.0687　⑤ 0.0776

28. 다음 그림의 빈칸에 6장의 사진 A, B, C, D, E, F를 하나씩 배치하여 사진첩의 한 면을 완성할 때, A와 B가 이웃하는 경우의 수는? (단, 옆으로 이웃하는 경우만 이웃하는 것으로 한다.) [4점]



① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

29. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $H(t)$는 평균 20, 표준편차 t인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$H(t) = \mathrm{P}(X \leq 15)$$

이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $H(2.5) = \mathrm{P}(Z \geq 2)$

ㄴ. $H(2) < H(2.5)$

ㄷ. $H(5) < 5H(2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

30. 다음 표와 같이 3개 과목에 각각 2개의 수준으로 구성된 6개의 과제가 있다. 각 과목의 과제는 수준Ⅰ의 과제를 제출한 후에만 수준Ⅱ의 과제를 제출할 수 있다. 예를 들어 '국어A → 수학A → 국어B → 영어A → 영어B → 수학B' 순서로 과제를 제출할 수 있다.

수준 \ 과목	국어	수학	영어
Ⅰ	국어A	수학A	영어A
Ⅱ	국어B	수학B	영어B

6개의 과제를 모두 제출할 때, 제출 순서를 정하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.