2010학년도 대수능 9월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 풀이

1.

$\log_2 9 \cdot \log_3\sqrt{2} = \dfrac{2\log 3}{\log 2} \cdot \dfrac{\frac{1}{2}\log 2}{\log 3}$

$= 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$

답 ①

2.

$x\to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$ 이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax-b)=1+a-b=0$

$a-b=-1 \cdots$㉠

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^3-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-b)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-b}{x^2+x+1}=\dfrac{1-b}{3}=3$

$1-b=9 \cdots$㉡

㉠,㉡에서 $a=7$, $b=8$ 이므로

$a+b=15$

답 ④

3.

$X=AB-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 4 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -6\end{pmatrix}$

답 ③

4.

주어진 부등식의 우변을 좌변으로 이항하여 통분하면

$\dfrac{3(x-2)-(x+4)-(x+4)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$

≥ 0

이므로

$\dfrac{x^2+2}{(x+4)(x-2)}\leq 0$

이때, $x^2+2>0$이므로

$(x+4)(x-2)<0$

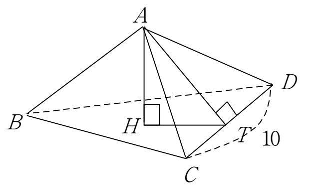
$\therefore\ -4<x<2$

따라서 구하는 정수 x의 합은

$-3-2-1+0+1=-5$

답 ①

5.



점 A에서 변 CD에 내린 수선의 발을 T라 하자.

$\triangle ACD=\dfrac{1}{2}\overline{AT}\times\overline{CD}=40$이므로

$\overline{AT}=8$

따라서 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기가 30 이므로 직각삼각형 AHT에서

$\overline{AH}=\overline{AT}\times\sin 30 = 8\times\dfrac{1}{2}=4$

답 ②

6.

10년 전의 이 도시의 중심온도를 u(℃), 근교의 농촌온도를 r(℃), 도시화된 지역의 넓이를 a(㎢)라고 하면 현재의 이 도시의 중심온도는 $u+x$(℃), 근교의 농촌온도는 r(℃), 도시화된 지역의 넓이는 $\dfrac{5}{4}a$(㎢))이다. 즉,

$u=r+0.65+1.6\log a \cdots$㉠

$u+x=r+0.65+1.6\log\dfrac{5}{4}a \cdots$㉡

㉡-㉠에서

$x=1.6\log\dfrac{5}{4}a-1.6\log a$

$=1.6\log\dfrac{\frac{5}{4}a}{a}=1.6\log\dfrac{5}{4}$

$=1.6(\log 5-\log 4)$

$=1.6(1-3\log 2)$

$=1.6(1-3\times 0.3)=0.16$

답 ⑤

7.

도형의 넓이가 같으므로

$\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$

$=2\int_0^1\{(-x^4+x)-(ax-ax^2)\}dx$

$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$

$=2\int_0^1\{x^4+ax^2+(1-a)x\}dx$

$\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx-2\int_0^1\{x^4+ax^2+(1-a)x\}dx=0$

$\int_0^1[(-2x^4+x^3+x)-2\{x^4+ax^2+(1-a)x\}]dx=0$

$\int_0^1\{x^3-2ax^2+(2a-1)x\}dx=0$

$\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}ax^3+\dfrac{2a-1}{2}x^2\right]_0^1=0$

$\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}a+a-\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{4}$

답 ④

8.

ㄱ.

$x\to 0-$일 때, $f(x)\to 0-$이므로

$g(f(x))\to 0$

$x\to 0+$일 때, $f(x)\to 0+$이므로

$g(f(x))\to -2$

그러므로 극한값 $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))$는 존재하지 않는다. <거짓>

ㄴ.

$x\to 2-$일 때, $f(x)=1$이므로

$g(f(x))=1$

$x\to 2+$일 때, $f(x)=-1$이므로

$g(f(x))=1$

그러므로 $\lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=1$ <참>

ㄷ. $f(x+4)=f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4}g\left(f\left(2k+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(4+\dfrac{1}{x}\right)\right)\right.$

$$+g\left(f\left(6+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(8+\frac{1}{x}\right)\right)\}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(4+\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$

한편

$x\to\infty$이면 $2+\frac{1}{x}\to 2+$이므로

$f\left(2+\frac{1}{x}\right)=-1$에서 $g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)=1$

$x\to\infty$이면 $\frac{1}{x}\to 0+$이므로

$f\left(\frac{1}{x}\right)=0+$에서 $g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-2$

그러므로 구하는 값은

$$2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$

$=2\{1+(-2)\}=-2$ <참>

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

9.

직선 l_1의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 직선 l_1과 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\sqrt{3}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$

이때, $\overline{OO_1}=4$, $\angle A_1O_1O_2=\frac{\pi}{6}$에서

$$\overline{O_1A_1}=\overline{O_1O_2}=\overline{OO_1}\cos\frac{\pi}{6}$$

$=2\sqrt{3}$

$$\overline{OO_2}=\overline{OO_1}\sin\frac{\pi}{6}=2$$

그러므로

$S_1=\triangle O_1OO_2-$(부채꼴 $O_1A_1O_2$)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{OO_2}\times\overline{O_1O_2}-\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}^{\,2}\times\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}$$

$=2\sqrt{3}-\pi$

한편,

$$\overline{O_2O_3}=\overline{O_1O_2}=\overline{OO_1}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OO_1}$$

…

$$\overline{O_{2n+2}O_{2n+3}}=\overline{O_{2n+1}O_{2n+2}}=\overline{O_{2n}O_{2n+1}}\cos\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{O_{2n}O_{2n+1}}$$

이므로 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}-\pi$이고 공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ 즉, $\frac{3}{4}$인 등비수열이다.

따라서,

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{1-\frac{3}{4}}=8\sqrt{3}-4\pi$$

답 ②

10.

9가 적힌 카드가 선택 되는 경우 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수는 9장의 카드에서 9와 연속인 8도 제외시켜야하므로 7장의 카드에서 연속하지 않는 2장의 카드를 뽑아야 한다.

따라서 경우의 수는 $N(7,2)$

$\therefore N(9,3)=N(7,2)+N(8,3)$

여기서 $N(k,2)$는 k장의 카드에서 2장을 뽑을 때 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수이므로

$N(k,2)={}_kC_2-(k-1)$

$$\therefore N(9,3)=\sum_{k=3}^{7}\{{}_kC_2-(k-1)\}$$

$=35$

답 ①

11.

A 검색대를 통과한 여학생의 수를 x라 고 하면

$$p=\frac{{}_xC_1}{{}_7C_1}=\frac{x}{7}$$

B 검색대를 통과한 여학생의 수는 $7-x$

이므로 B 검색대를 통과한 학생의 수는 $3+(7-x)=10-x$

$$q=\frac{{}_3C_1}{{}_{10-x}C_1}=\frac{3}{10-x}$$

따라서

$\frac{x}{7}=\frac{3}{10-x}$, $x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0$ $\therefore x=3\ (\because 0<x<7)$

답 ③

12.

쌍곡선 $9x^2-16y^2=144$에서

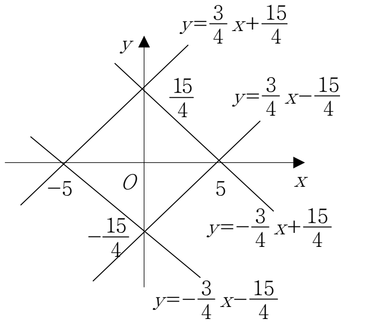
$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{3}{4}x$

$c^2=a^2+b^2=25$

이므로 초점의 좌표는 $(5,0)$, $(-5,0)$

따라서 구하는 4개의 직선을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$2\times\frac{1}{2}\times10\times\frac{15}{4}=\frac{75}{2}$$

답 ⑤

13.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 모두 d라 하면

$a_n=d+(n-1)d=dn$

$$\therefore\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n=\sum_{k=1}^{n}dk=\frac{dn(n+1)}{2}$$

ㄱ. $=\infty$ (거짓)

ㄴ. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{dn(n+1)}$$

$$=\frac{2}{d}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{2}{d}\lim_{n\to\infty}(1-1overn+1)=\frac{2}{d}\text{(참)}$$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d(n+1)}{\sqrt{\frac{d(n+1)(n+2)}{2}}+\sqrt{\frac{dn(n+1)}{2}}}$$

$$=\frac{d}{\sqrt{\frac{d}{2}}+\sqrt{\frac{d}{2}}}=\frac{\sqrt{2d}}{2}\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

14.

$$b_1\times b_3\times\cdots\times b_9=\left(\frac{1}{2}\right)^{5a_1+4a_3+3a_5+2a_7+a_9}$$

$$=2^{-(5a_1+4a_3+3a_5+2a_7+a_9)}$$

이때, 수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{n+1}-a_n=d$이므로

$b_1\times b_2\times\cdots\times b_{10}$

$$=2^{5d+4d+3d+2d+d}=2^{15d}=8$$

따라서 $2^{15d}=2^3$이므로

$$d=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

답 ③

15.

ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분은 구의 중심을 지나고 교선 l과 평행한 지름의 그림자의 길이와 같다.

그런데, 이 지름은 태양광선과 수직이고 교선과 평행하므로

이 지름의 그림자의 길이는 변하지 않는다.

따라서 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 구의 지름의 길이인 $2r$와 같다. (참)

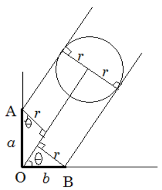
ㄴ. 다음 그림에서

$$a=\frac{r}{\cos\Theta},\ b=\frac{r}{\sin\Theta}$$

이므로 $\Theta=60°$ 이면

$$a=2r,\ b=\frac{2r}{\sqrt{3}}$$

$\therefore\ a>b$ (거짓)



ㄷ .

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{\cos^2\Theta}{r^2}+\frac{\sin^2\Theta}{r^2}=\frac{1}{r^2}$$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

16.

두 번째 시행부터 △가 표시되는 경우는 뒤(T)→앞(H)인 경우뿐이다. 또한, 두 번째 시행부터는 뒤

(I) 1회의 시행에 앞면(H)이 나온 경우 (즉, 1회에 △가 표시된 경우)

㉠T→H가 2, 3회에 나온 경우의 수는

$2\times2-1=3$(가지)

㉡T→H가 3, 4회에 나온 경우의 수는

$2\times2=4$ (가지)

㉢T→H가 4, 5회에 나온 경우의 수는

$2\times2-1=3$(가지)

$\therefore\ 3+4+3=10$ (가지)

(II) 1회의 시행에 뒷면(T)이 나온 경우 (즉, 1회에 ○가 표시된 경우)

㉠ 2회에 H가 나온 경우는 T→H가 3, 4, 5회에 1번은 나와야 하므로

$2\times2=4$ (가지)

㉡ 2회에 T가 나온 경우는 3, 4, 5회에 각각 H, T, H가 나와야 한다.

즉, 1(가지)

$\therefore\ 4+1=5$(가지)

또한, 모든 경우의 수는 $2^5=32$ 가지이므로 구하고자 하는 확률은

$$\frac{10+5}{32}=\frac{15}{32}$$

답 ②

17.

n이 자연수일 때, $A_n(x_n,\ 4^{x_n})$이라 하면 $P_n(\frac{4^{x_n}}{2},\ 4^{x_n})$이다.

이때, 점 B_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_n=\log_4\frac{4^{x_n}}{2}=x_n-\frac{1}{2}$이므로

$$B_n\left(\frac{4^{x_n}}{2},\ x_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ Q_n\left(\frac{x_n}{2}-\frac{1}{4},\ x_n-\frac{1}{2}\right)$$

이때, 점 A_{n+1}의 x좌표는 점 Q_n의 x좌표와 같으므로

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{4}$$

이때, $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ (α는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}x_n-\frac{1}{4}$$

에서

$$\alpha=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \alpha=-\frac{1}{2}$$

답 ⑤

18.

$y'=3x^2$ 이므로 점 $P(a,-6)$에서 접선의 방정식은

$y+6=3a^2(x-a)\cdots$㉠

또한, 점 $P(a,-6)$는 곡선 $y=x^3+2$ 위의 점이므로

$a^3+2=-6,\ a^3=-8$

$\therefore\ a=-2$

따라서, ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y+6=12(x+2),\ y=12x+18$

$\therefore\ a+m+n=28$

답 28

19.

$f(x)-x=X$라고 하면 주어진 방정식은

$\sqrt{X}=2X-1$

양변을 제곱하여 정리하면

$4X^2-5X+1=0$,

$(4X-1)(X-1)=0$

∴ $X=\frac{1}{4}$ 또는 $X=1$

이때, $X=\frac{1}{4}$은 무연근이므로

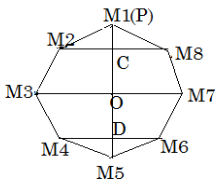
$X=f(x)-x=1$

즉, $f(x)=x+1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 서로 다른 교점의 개수는 8개이다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는 8개이다.

답 8

20.

그림과 같이 점 P를 지나고 밑면에 평행한 평면이 모서리 A_iB_i와 만나는 점을 M_i라 하자.



모서리 A_iB_i의 중점을 M_i라 하면

$$\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=2\overrightarrow{PM_i}$$

점 M_1은 점 P와 일치하므로

$\overrightarrow{PM_1}=\vec{0}$

$\overrightarrow{PM_2}+\overrightarrow{PM_8}=2\overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{PM_3}+\overrightarrow{PM_7}=2\overrightarrow{PO}$

$\overrightarrow{PM_4}+\overrightarrow{PM_6}=2\overrightarrow{PD}$

∴ $\sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i})$

$=2\{\overrightarrow{PM_1}+(\overrightarrow{PM_2}+\overrightarrow{PM_8})+(\overrightarrow{PM_3}+\overrightarrow{PM_7})$

$+(\overrightarrow{PM_4}+\overrightarrow{PM_6})+\overrightarrow{PM_5}\}$

$=2(\vec{0}+2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PM_5})$

$=4(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})+4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{PM_5}$

$=4\overrightarrow{PM_5}+2\overrightarrow{PM_5}+2\overrightarrow{PM_5}$

$=8\overrightarrow{PM_5}$

그런데, 위 그림에서 삼각형 $M_4M_5M_6$은

빗변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{OM_4}=\frac{\overline{A_1A_3}}{\sqrt{2}}=3$$

∴ $|\overrightarrow{PM_5}|=2\overline{OM_4}=6$

따라서 구하는 벡터 $\sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i})$의 크기는

$|\overrightarrow{PM_5}|=8\times6=48$

답 48

21.

$\int_0^x(x-t)\{f(t)\}^2dt=6\int_0^1x^3(x-t)^2dt$

…㉠에서

$\int_0^x(x-t)\{f(t)\}^2dt$

$=x\int_0^x\{f(t)\}^2dt-\int_0^xt\{f(t)\}^2dt$

$6\int_0^1x^3(x-t)^2dt$

$=6\int_0^1(x^5-2x^4t+x^3t^2)dt$

$=6\left[x^5t-x^4t^2+x^3\cdot\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$

$=6(x^5-x^4+\frac{1}{3}x^3)$

㉠의 양변을 x에 대해 미분하면

$\int_0^x\{f(t)\}^2dt+x\{f(x)\}^2-x\{f(x)\}^2$

$=6(5x^4-4x^3+x^2)$

∴ $\pi\int_0^x\{f(t)\}^2dt=6\pi(5x^4-4x^3+x^2)$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$, x축, y축으로 둘러싸인 도형을 x축으로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는

$\pi\int_0^1\{f(t)\}^2dt=6\pi(5-4+1)=12\pi$

∴ $a=12$

답 12

22.

a_n은 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이므로

$n=1$일 때, $\frac{1}{3^k}$이 자연수가 되는 k의 값은 0이므로 $a_1=0$

$n=2$일 때, $\frac{2}{3^k}$이 자연수가 되는 k의 값은 0이므로 $a_2=0$

$n=3$일 때, $\frac{3}{3^k}$이 자연수가 되는 k의 값은 1이므로 $a_3=1$

…

그러므로 $n=l\times3^k$ (단, l은 3의 배수가 아닌 자연수)이면 $a_n=k$이다.

$a_m=3$에서 $m=l\times3^3$ (단, l은 3의 배수가 아닌 자연수)

따라서

$a_m+a_{2m}+a_{3m}+a_{4m}+a_{5m}$

$+a_{6m}+a_{7m}+a_{8m}+a_{9m}$

$=a_{l\times3^3}+a_{2l\times3^3}+a_{3l\times3^3}+a_{4l\times3^3}+a_{5l\times3^3}$

$+a_{6l\times3^3}+a_{7l\times3^3}+a_{8l\times3^3}+a_{9l\times3^3}$

$=3+3+4+3+3+4+3+3+5$

$=31$

답 31

23.

구에서 평면 α, β에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 구의 중심 O와 두 점 H_1, H_2에 의하여 결정되는 평면과 원 C_1과 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2, 원 C_2가 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2라 하면 아래 그림에서 구하는 선분 PQ의 길이는 선분 P_1Q_1의 길이이다.

한편 구의 중심 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면 점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{OH_1}=\frac{|0+0+0-15|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$$

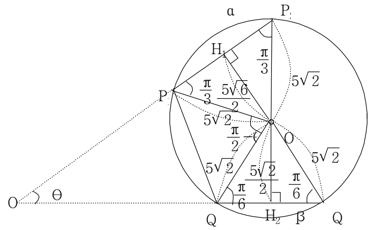
또, 구의 중심 O에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H_2이라 하면 점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{OH_2}=\frac{|0+0+0-25|}{\sqrt{1+1+48}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

그러므로 직각삼각형 P_1OH_1에서

$\angle P_1OH_1 = \dfrac{\pi}{3}$

또, 직각삼각형 Q_1H_2O에서



$\angle OQ_1H_2 = \dfrac{\pi}{6}$

한편 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

사각형 $O'Q_1OP_1$에서

$\angle P_1OQ_1 = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

또, 두 평면의 법선벡터가 각각 $(1,1,2)$, $(1,-1,-4\sqrt{3})$이므로

$\cos\theta$

$= \dfrac{|1\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot(-4\sqrt{3})|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+1+48}} = \dfrac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ 이므로

$\overline{PQ}^2$

$= \overline{OP_1}^2 + \overline{OQ_1}^2 - 2\,\overline{OP_1}\cdot\overline{OQ_1}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2\cdot5\sqrt{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{5}$

$= 40$

답 40

24.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 접하므로

$f(x) = (x-2)^2(x^2+ax+b)+2$

로 놓을 수 있다.

$f'(x) = 2(x-2)(x^2+ax+b)+(x-2)^2(2x+a)$

이 때, $f'(0)=0$이므로 대입하면

$-4b+4a=0$

$\therefore\ a=b$

이 식을 대입하고 $f(x)$를 y로 놓으면

$y=(x-2)^2(x^2+ax+a)+2$

이 식을 a에 관하여 정리하면

$a(x+1)(x-2)^2+(x-2)^2x^2+2-y=0$

이 식은 a에 관한 항등식이므로

$(x+1)(x^2-2)^2=0$ ---㉠

이고

$(x-2)^2x^2+2-y=0$ ---㉡

㉠에서 $x=-1$ 또는 $x=2$이므로 ㉡에 대입하면

$y=11$ 또는 $y=2$

따라서 모든 y좌표의 합은 13이다.

답 13

25.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$

$A^3 = -A,\ A^4 = E$

$\therefore\ A = A^5 = A^9 = \cdots$

$A^2 = A^6 = A^{10} = \cdots$

$A^3 = A^7 = A^{11} = \cdots$

$A^4 = A^8 = A^{12} = \cdots$

따라서 $A^m = A^n$을 만족하는 40이하의 두 자연수 $m, n\,(m>n)$의 순서쌍 (m,n)은

(5, 1)

(6, 2)

(7, 3)

(8, 4)

(9, 5), (9, 1)

(10, 6), (10, 2)

(11, 7), (11, 3)

(12, 8), (12, 4)

(13, 9), (13, 5), (13, 1)

⋯

(16, 12), (16, 8), (16, 4)

⋯

(40, 36), (40, 32), ⋯, (40, 4)

따라서, 순서쌍의 개수는

$4\times1+4\times2+4\times3+\cdots+4\times9$

$=4(1+2+3+\cdots+9)$

$=4\times\dfrac{9\times10}{2}=180$

답 180

미분과 적분

26.

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 에서

$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7}{6}\pi$이고 $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\dfrac{\pi}{2}<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\pi$

$\therefore\ \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$=-\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}$

$=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

답 ⑤

27.

$f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ 이므로

$\dfrac{1}{f'(a)}=\dfrac{e^a-1}{e^a}$

$g(a)=b$라 하면

$f(b)=\ln(e^b-1)=a$

이므로

$e^b-1=e^a$

이때, $g'(a)=\dfrac{1}{f'(b)}$ 이므로

$\dfrac{1}{g'(a)}=f'(b)=\dfrac{e^b}{e^b-1}=\dfrac{e^a+1}{e^a}$

$\therefore\ \dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{g'(a)}$

$=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=2$

답 ①

28.

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}\,dt$에서

$f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$

또한, $f(x)=y$라고 하면

$f'(x)=\frac{1}{1+x^6}=\frac{dy}{dx}$ 이고

$f(0)=0$, $f(a)=\frac{1}{2}$ 이므로

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}} e^y\,dy$

$=[e^y]_0^{\frac{1}{2}}$

$=e^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{e}-1$

답 ②

29.

ㄱ. $0<x<1$이므로 $0<x^2<1$ 이고

$0<\frac{x^2}{2}<\frac{1}{2}$

또한 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}<\frac{\pi}{4}$ 이다.

∴ $0<f(x)=\sin\frac{x^2}{2}<\sin\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

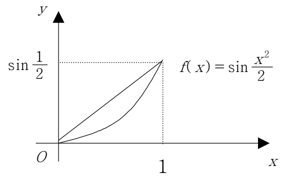
∴ $x^2\sin\frac{x^2}{2}<f(x)<\cos\frac{x^2}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=x\cos\frac{x^2}{2}$

$f''(x)=\cos\frac{x^2}{2}-x^2\sin\frac{x^2}{2}>0$ (∵ ㄱ)

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 (0, 1)에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄷ. 구간 (0, 1)에서 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



∴ $\int_0^1 f(x)\,dx\le\frac{1}{2}\times1\times\sin\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

답 ④

30.

$A(11\cos\Theta,\ 11\sin\Theta)$이므로 점 Q의 x 좌표는 $11\cos\Theta$이다.

따라서 $\frac{(11\cos\Theta)^2}{11^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$에서

$y^2=9(1-\cos^2\Theta)=9\sin^2\Theta$

이므로 점 Q의 y좌표는 $3\sin\Theta$이다.

또, $B(3\cos\Theta,\ 3\sin\Theta)$, $P(11, 0)$이다.

∴

$S_1=\frac{1}{2}(11\cos\Theta-3\cos\Theta)(11\sin\Theta-3\sin\Theta)$

$=32\cos\Theta\sin\Theta$

$S_2=\frac{1}{2}(11-11\cos\Theta)(11\sin\Theta-3\sin\Theta)$

$=44(1-\cos\Theta)\sin\Theta$

따라서

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{11(1-\cos\Theta)}{8\cos\Theta}$

$=\frac{11(1-\cos\Theta)(1+\cos\Theta)}{8\cos\Theta(1+\cos\Theta)}$

$=\frac{11\sin^2\Theta}{8\cos\Theta(1+\cos\Theta)}$

이므로

$\lim_{\Theta\to0}\frac{S_2}{\Theta^2 S_1}=\lim_{\Theta\to0}\frac{11\sin^2\Theta}{8\Theta^2\cos\Theta(1+\cos\Theta)}$

$=\frac{11}{8\cdot1\cdot(1+1)}=\frac{11}{16}$

∴ $p+q=27$

답 27

확률과 통계

26.

주어진 자료의 중앙값은

$\frac{30+x+33}{2}>30$

이므로 최빈값은 33이다.

∴ $\frac{30+x+33}{2}=33$

∴ $x=2$

평균 또한 33이므로

$\frac{26+27+29+30+3\times33+37+40+40+y}{10}$

$=33$

$\frac{328+y}{10}=33$

∴ $y=2$

따라서 구하는 범위는

$42-26=16$

답 ②

27.

확률분포표를 만들면

X	1	2	3	4	5	계
$P(X)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

그러므로

$E(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{0}{7}+5\times\frac{1}{7}$

$=\frac{15}{7}$

따라서,

$E(14X+5)=14E(X)+5$

$= 14 \times \frac{15}{7} + 5 = 35$

답 ②

28.

ㄱ. $P(X \geq 2m) = P(Y \geq 3m)$에서

$P\left(\frac{X-m}{\sigma_1} \geq \frac{2m-m}{\sigma_1}\right)$

$= P\left(\frac{Y-m}{\sigma_1} \geq \frac{3m-m}{\sigma_1}\right)$

$P\left(Z \geq \frac{m}{\sigma_1}\right) = P\left(Z \geq \frac{2m}{\sigma_1}\right)$

이므로

$\frac{m}{\sigma_1} = \frac{2m}{\sigma_2}$

그러므로

$\sigma_2 = 2\sigma_1$ <참>

ㄴ. $\sigma_1 < \sigma_2$이므로 $f(m) > g(m)$ <참>

ㄷ.<반례>

$m = 1$, $\sigma_1 = 1$로 놓으면

$P(X \leq 0) + P(Y \leq 0)$

$= P\left(Z \leq \frac{0-1}{1}\right) + P\left(Z \geq \frac{0-1}{2}\right)$

$= P(Z \leq -1) + P\left(Z \geq -\frac{1}{2}\right) < 1$

<거짓>

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

29.

A팀 2번 선수가 승리한 횟수가 1인 경우는

(i) A팀 1번 선수가 2승 1패하고 2번 선수가 1승 한 경우

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

(ii) A팀 1번 선수가 1승 1패하고 2번 선수가 1승 1패 한 경우

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$

(iii) A팀 1번 선수가 1패하고 2번 선수가 1승 1패 한 경우

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 확률은

$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

답 ④

30.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha + \beta = \frac{100}{10} = 10$

$\alpha\beta = \frac{k}{10}$

이때, 신뢰구간의 길이가

$\beta - \alpha = 2 \times 1.96 \times \frac{\frac{1}{1.96}}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$

이므로

$\alpha\beta = \frac{1}{4}\{(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2\}$

$= \frac{1}{4}\left(100 - \frac{4}{10}\right)$

$= \frac{249}{10} = \frac{k}{10}$

$\therefore k = 249$

답 249

이산수학

26.

$19 = 4 \times 5 - 1$ 이므로

$w = x = y = z = 5$라면 항상 1이 남으므로

네 자연수 w, x, y, z 중에는 반드시 4이하인 수가 있어야 한다.

한편 $19 = 4 \times 4 + 3$ 이므로

$w = x = y = z = 4$라면 3이 부족하므로

네 자연수 w, x, y, z 중에는 반드시 5이상인 수가 있어야 한다.

또 $w = 5$ 이면 $x + y + z = 14$ 이고

$x = y = z = 5$ 라면

$14 = 3 \times 5 - 1$이므로 세 자연수 x, y, z 중에는 반드시 4이하인 수가 있어야 하지만 두 수가 항상 5보다 크다고는 할 수 없다. 따라서 옳게 말한 사람은 '아름'과 '다음' 이다.

답 ③

27.

${}_5C_1 \times {}_3C_1 + {}_5C_2 \times {}_3C_2 + {}_5C_3 \times {}_3C_3$

$= 15 + 30 + 10 = 55$

답 ⑤

28.

$a_n = 3a_{n-1} + 2$ 이고 $a_1 = 5$ 이므로

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 12 \cdot 3^{k-1}$

$= 5 + \frac{12(3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$

$= 6 \cdot 3^{n-1} - 1$

$\therefore a_6 = 6 \cdot 3^{6-1} - 1 = 6 \cdot 3^5 - 1 = 1457$

답 ②

29.

회로 ABJI에서 변을 제거하는 방법은 6가지

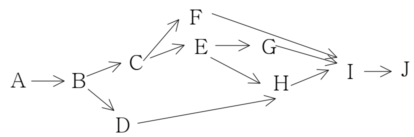
회로 BEFI에서 변을 제거하는 방법은 4가지이므로 생성 수형도의 개수는

$6 \times 4 = 24$

답 ④

30.

각 작업과 작업의 순서를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



따라서 전체 작업을 마치기 위하여 필요한 최소의 시간은

A- B-C-E-H-I-J 로

2+ 1+ 3+ 2+ 2+ 3+ 1 = 14일이다

답 14