# 2009학년도 7월 고3 전국연합학력평가
# 정답 및 해설

## 수리 영역

### "가"형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ⑤ | 3 | ④ | 4 | ① | 5 | ② |
| 6 | ① | 7 | ④ | 8 | ③ | 9 | ⑤ | 10 | ⑤ |
| 11 | ③ | 12 | ④ | 13 | ③ | 14 | ① | 15 | ② |
| 16 | ① | 17 | ⑤ | 18 | 27 | 19 | 19 | 20 | 10 |
| 21 | 64 | 22 | 36 | 23 | 54 | 24 | 11 | 25 | 35 |

### 해설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기
$\log_4 \frac{16}{9} + \log_2 3 = \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 3 = 2$

2. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 계산하기
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(4x^3+6x^2-2x)dx$
$= 2\int_0^1 6x^2\,dx = 4$

3. [출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 곱셈의 성질 이해하기
$X^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로 $X\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$
$X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로 $X^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$
∴ 성분의 합은 11

4. [출제의도] 미분계수의 정의 이해하기
$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$
$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$
$= 2f'(a) = 8 \qquad \therefore\ a = 5$

5. [출제의도] 삼차부등식 계산하기
$x^3-6x^2+3x+10 \le 0$
$(x+1)(x-2)(x-5) \le 0$
$x \le -1$ 또는 $2 \le x \le 5$이므로
자연수 $x$의 개수는 4개

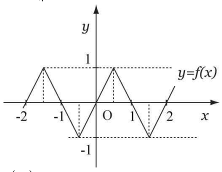
6. [출제의도] 정규분포의 표준화 이해하기
모평균 $m = 600\mathrm{g}$, 모표준편차 $\sigma = 20\mathrm{g}$
임의추출한 농구공 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(600,\ \left(\frac{20}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.
$\mathrm{P}(595 \le \overline{X} \le 610) = \mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{4} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$
$= 0.8185$
∴ $\frac{\sqrt{n}}{2} = 2$이므로 $n = 16$

7. [출제의도] 등차중항과 정적분의 개념 이해하기
$S_1,\ S_2,\ S_3$이 등차수열을 이루므로
$2S_2 = S_1 + S_3$
$\int_0^k f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3 = S_2$
$= -\int_1^4 f(x)dx = \frac{9}{2}$

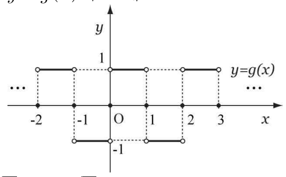
8. [출제의도] 미분을 이용한 부등식의 수학내적 문제해결하기
$f(x) = 3x^4-8x^3-6x^2+24x$
$g(x) = k-2\sin\frac{\pi}{2}x$
$f'(x) = 12(x-2)(x-1)(x+1)$이므로
$f(x)$의 최솟값은 $x=-1$일 때, $-19$
$k-2 \le k-2\sin\frac{\pi}{2}x \le k+2$이므로
$g(-1) = k+2$는 $g(x)$의 최댓값이다.
따라서 $k+2 \le -19$이므로 $k$의 최댓값은 $-21$

9. [출제의도] 연속성과 미분가능성의 개념 이해하기
ㄱ. $\frac{g(2)}{f(2)} = 0$, $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$ (참)
ㄴ. $g(f(1)) = -1$, $\lim_{x\to 1} g(f(x)) = -1$(참)
ㄷ. $f(x) = \begin{cases}1 & (3 \le x < 4)\\ x-3 & (4 \le x \le 5)\end{cases}$,
$g(x) = x-4\ (3 \le x \le 5)$
$f(x)g(x) = \begin{cases}x-4 & (3 \le x < 4)\\ (x-3)(x-4) & (4 \le x \le 5)\end{cases}$
$\lim_{x\to 4-0}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4} = 1$
$\lim_{x\to 4+0}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4} = 1$ (참)

10. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기
$y = f(x)$의 그래프는




함수 $y = g(x)$는
1) $x$가 정수이면 $f(x) = 0$이므로
$g(x) = 0$
2) $2k-1 < x < 2k$ ($k$는정수)이면
$0 \le 1+f(x) < 1$이므로 $g(x) = -1$
3) $2k < x < 2k+1$ ($k$는정수)이면
$1 < 1+f(x) \le 2$이므로 $g(x) = 1$
따라서 $y = g(x)$의 그래프는

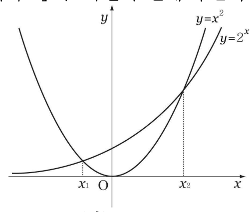



$g(10\sqrt{2}) - g(\sqrt{3}) = 1-(-1) = 2$

11. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기
(1) $n = 1$일 때,
(좌변)$= \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \boxed{N\,!}$
(우변)$= \frac{N+1}{N+1}\,a_1 = a_1 = \boxed{N\,!}$
이므로 (★)이 성립한다.
(2) $n = m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면
$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{N+m}{N+1}\,a_m$이다.
$n = m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.
$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{N+m}{N+1}\,a_m + a_{m+1}$
$= \frac{N+m}{N+1}\,a_m + \boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$
$= \frac{1}{N+1}\times\frac{(m+N)!}{(m-1)!} + \boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$
$= \frac{1}{N+1}\left\{\ \boxed{\frac{(m+N+1)!}{m!}}\ \right\}$
$= \frac{N+m+1}{N+1}\,a_{m+1}$

12. [출제의도] 확률을 이용한 수학외적 문제해결하기
임의로 한 상자를 택하는 확률 : $\frac{1}{n}$
상자에서 구슬 2개 꺼낼 때, 흰 구슬이 나올 확률
[상자1] 확률 : 0
[상자2] 확률 : $\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}$
[상자3] 확률 : $\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}$
⋮
[상자$n$] 확률 : $\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2}$
$\mathrm{P}_n = \frac{1}{n}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_3}{n\cdot{}_n\mathrm{C}_2}$
$= \frac{n+1}{3n}$
$\mathrm{P}_{10} = \frac{11}{30}$

13. [출제의도] 두 곡선의 관계 추론하기

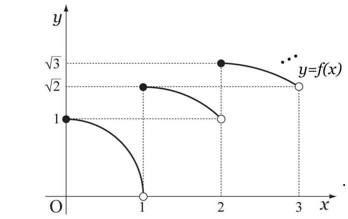



ㄱ. $-1 < x_1 < 0$ (참)
ㄴ. $|x_1y_1| < |x_2y_2|$ (거짓)
ㄷ. $|x_1\cdot y_2| - |x_2\cdot y_1| = |x_1\cdot x_2{}^2| - |x_2\cdot x_1{}^2|$
$= |x_1\cdot x_2|(|x_2| - |x_1|) > 0$ (참)

14. [출제의도] 도형의 규칙성을 추론하여 수학내적 문제해결하기
$\mathrm{S}_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\times 3^2 + \frac{2\pi}{3}\times 2^2 + \frac{2\pi}{3}\times 1^2\right)$
$= \frac{\pi}{3}(3^2+2^2+1^2)$
$\mathrm{S}_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\times 4^2 + \frac{\pi}{2}\times 3^2 + \frac{\pi}{2}\times 2^2 + \frac{\pi}{2}\times 1^2\right)$
$= \frac{\pi}{4}(4^2+3^2+2^2+1^2)$
⋮
$\mathrm{S}_{20} = \frac{\pi}{20}(20^2+19^2+\ \cdots\ +1^2)$
$= \frac{287\pi}{2}$

15. [출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 이용한 수학내적 문제해결하기
$2^4\times 3^3$은 20개의 양의 약수를 갖는다.
약수들의 곱 $\mathrm{A} = (2^4\times 3^3)^{10} = 2^{40}\times 3^{30}$
$\left[\frac{\mathrm{A}}{10^{n-1}}\right]$는 A의 최고자리의 숫자이고
$\log\mathrm{A} = 40\log 2 + 30\log 3 = 26.353$이다.
$\log 2 < 0.353 < \log 3$이므로
$\left[\frac{\mathrm{A}}{10^{n-1}}\right] = 2$

16. [출제의도] 정적분을 이용하여 회전체의 부피 추론하기
그래프는 $(x-[x])^2 + y^2 = [x]+1$ 이므로
$0 \le x < 1$이면 $x^2+y^2 = 1$
$1 \le x < 2$이면 $(x-1)^2+y^2 = 2$
$2 \le x < 3$이면 $(x-2)^2+y^2 = 3$
⋮
$n-1 \le x < n$이면 $(x-n+1)^2+y^2 = n$




$\mathrm{V}_n=\pi\int_{n-1}^{n}\{f(x)\}^2dx$

$=\pi\int_{n-1}^{n}(n-(x-n+1)^2)dx=\left(n-\frac{1}{3}\right)\pi$

$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}_k=\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{3}\right)\pi=\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)\pi$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}_k}{n^2}=\frac{\pi}{2}$

**17. [출제의도] 역행렬의 존재성 추론하기**

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 $a=c,\ b\neq d$

$\therefore ad-bc\neq 0$ (참)

ㄴ. 두 직선이 일치하면 $a=c,\ b=d$

$\therefore ad-bc=0$ (참)

ㄷ. 두 직선이 $x$축 위에서 만나면 $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$

$\therefore ad-bc=0$ (참)

**18. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기**

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$ 의 분자, 분모에

$\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}$ 을 곱하여 정리하면

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2}{2}(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})=27$

**19. [출제의도] 함수의 극대, 극소의 개념 이해하기**

$f(x)=x^3-ax^2-100x+10$이면

$f'(x)=3x^2-2ax-100$

$f'(a)=3a^2-2a^2-100<0$

$-10<a<10$이므로 정수의 개수는 19개

**20. [출제의도] 두 곡선의 관계를 이해하여 부등식의 해를 구하기**

$\{f(x)\}^4-\{g(x)\}^3f(x)\geqq 0$

(단, $f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0$)

$f(x)\{f(x)-g(x)\}\geqq 0$이므로

1) $f(x)>0$이면 $f(x)\geqq g(x)$

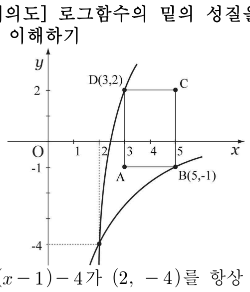
$\therefore$ 해는 5

2) $f(x)<0$이면 $f(x)\leqq g(x)$

$\therefore$ 해는 1, 2, 3

3은 무연근이므로 모든 근들의 곱은 10

**21. [출제의도] 로그함수의 밑의 성질을 이용한 그래프 이해하기**




$y=\log_a(x-1)-4$가 $(2,\ -4)$를 항상 지나므로 직사각형과 만나려면 $a>1$

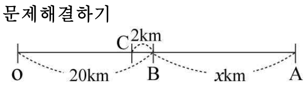
따라서 $y=\log_a(x-1)-4$는 증가함수이므로

$\mathrm{B}(5,\ -1)$을 지날 때, $a$의 최댓값 $M=4^{\frac{1}{3}}$

$\mathrm{D}(3,\ 2)$를 지날 때, $a$의 최솟값 $N=2^{\frac{1}{6}}$

$\left(\frac{M}{N}\right)^{12}=64$

**22. [출제의도] 분수방정식을 이용하여 수학외적 문제해결하기**




C : A가 선회하여 B와 만나는 지점

$v$ : 배 B의 최대 속력

$\frac{20}{v-2}=\frac{x+20}{2v-2}\cdots$ ①

$\frac{x+2}{2v+2}=1\cdots$ ②

①, ②를 연립하면 $v=12km/h$

따라서, 최대 속력의 합은 $36km/h$

**23. [출제의도] 정적분을 이용한 수학내적 문제해결하기**

직선을 $y=mx+n$ 이라 두면

$\int_0^6(x^3-6x^2-mx-n)dx=0$ 이므로 $n=-3m-18$

직선 $y=mx-3m-18$

$m(x-3)-(y+18)=0$이고 $m$에 관한 항등식이므로 점 D의 좌표는 $(x,\ y)=(3,-18)$ 따라서 넓이는 54

**24. [출제의도] 무한등비급수를 이용한 수학내적 문제해결하기**

$\triangle\mathrm{OA_1A_2}=\triangle\mathrm{OO_1A_1}+\triangle\mathrm{OO_1A_2}+\triangle\mathrm{O_1A_1A_2}$

$\frac{1}{2}\times 2\times 4=\frac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5})\ \therefore r_1=3-\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{OA_2A_3}=\triangle\mathrm{OO_2A_2}+\triangle\mathrm{OO_2A_3}+\triangle\mathrm{O_2A_2A_3}$

$\frac{1}{2}\times 2\times 1=\frac{1}{2}\times r_2\times(3+\sqrt{5})$

$\therefore r_2=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

따라서 $r_n=(3-\sqrt{5})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}r_n=6-2\sqrt{5}$이므로 $a+b=11$

**25. [출제의도] 확률을 이용한 수학외적 문제해결하기**

전구가 $n$개 켜져 있을 경우 1열, 2열, 3열, 4열은 각각 $n$, $4n$, $16n$, $64n$의 수를 나타내고, 전광판이 나타내는 수가 짝수일 사건은 홀수인 사건의 여사건이다.

홀수일 확률은 1열에서 1개,

나머지 열 중에서 1개 켜질 때이므로

$\therefore \frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{9}{22}$

따라서, 구하는 확률은 $1-\frac{9}{22}=\frac{13}{22}$

$p+q=35$

## 미분과 적분 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | ④ | 27 | ⑤ | 28 | ③ | 29 | ④ | 30 | 70 |

**26. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기**

$x\to 0$일 때, $a^x+b\to 0$이므로 $b=-1$

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}\times\frac{a^x-1}{x}$

$=\ln a=\ln 3$

$\therefore a=3$이므로 $a-b=4$

**27. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기**

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2+\sqrt{15}}{6}, \sin(\alpha-\beta)=\frac{2-\sqrt{15}}{6}$

$x^2+\frac{a}{3}x+\frac{b}{36}=0$

두 근의 합 $-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}\quad \therefore a=-2$

두 근의 곱 $\frac{b}{36}=\frac{-11}{36}\quad \therefore b=-11$

따라서, $ab=22$

**28. [출제의도] 삼각함수의 합성과 미분을 이용하여 그래프의 성질 추론하기**

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$라 놓으면

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$g(t)=\frac{t}{t-2}=1+\frac{2}{t-2}$

ㄱ. $t=\sqrt{2}$일 때, 최솟값 $-1-\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. $x=\frac{\pi}{4}$일 때, $t=\sqrt{2}$에서 최솟값 (거짓)

ㄷ. $f(x)=1+\frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2}$ 이다.

$f'(x)=-\frac{2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\right)^2}$ 이므로

$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ ($n$은 정수)에서 극솟값을 갖고

$x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ ($n$은 정수)에서 극댓값을 갖는다.(참)

**29. [출제의도] 미분을 이용하여 수학내적 문제해결하기**

직선 $y=-x+k$와 $y=x$가 수직이다.

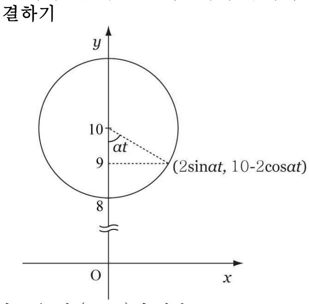
직선 $y=-x+k$와 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 되려면 직선 $y=-x+k$가 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점에서 접선의 기울기가 1일 때이다.

$f'(x)=\frac{1}{x}=1\quad\therefore x=1$

$g'(x)=e^{x-4}=1\ \therefore x=4$

(1, 4), (4, 1)을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+5$이므로 $k$의 값은 5이다.

**30. [출제의도] 미분을 이용하여 수학외적 문제해결하기**




날개의 끝을 점 $(x,\ y)$라 하면

$x^2+(y-10)^2=4\ \cdots$ ㉠

$y=9$일 때, $\frac{dy}{dt}=4\pi(m/s)$

시간에 따른 각의 변화율을 $\alpha$라 하면

$x=2\sin\alpha t,\ y=10-2\cos\alpha t$

$y=9$를 ㉠에 대입하면 $x=\sqrt{3}$

따라서 $\sin\alpha t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=10-2\cos\alpha t$를 $t$에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dt}=2\alpha\sin\alpha t(m/s)\ \therefore \alpha=\frac{4}{\sqrt{3}}\pi$

따라서 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은

$k=\frac{2\pi}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\therefore k^2=\frac{3}{4}$

$\therefore 10(p+q)=70$

## 확률과 통계 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | ⑤ | 27 | ④ | 28 | ③ | 29 | ③ | 30 | 40 |

**26. [출제의도] 줄기와 잎 그림에서 평균 구하기**

$\frac{280+320+180+2a+40}{10}=83$

$\therefore a=5$

**27. [출제의도] 기댓값을 이용하여 수학외적 문제해결하기**

2가지 제품을 구입할 때의 금액은 550원, 400원, 350원, 200원으로 각각 경우의 수는 1가지, 2가지, 2가지, 1가지이다. 따라서, 평균은

# 정답 및 해설



$\frac{550 + 400 \cdot 2 + 350 \cdot 2 + 200}{6} = 375$(원)

**28. [출제의도] 이산확률변수의 확률질량함수 성질 이해하기**

$\sum_{x=1}^{10} \frac{k}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{10} k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{10}{11}k = 1$

$\therefore\ k = \frac{11}{10}$

**29. [출제의도] 정규분포의 표준화 성질 추론하기**

확률변수 $X$, $Y$는 각각 정규분포$N(m, (2\sigma)^2)$, $N(2m, \sigma^2)$을 따른다.

ㄱ. $P(X \leqq 0) = P\left(Z \leqq -\frac{m}{2\sigma}\right)$

$P\left(Y \geqq \frac{5}{2}m\right) = P\left(Z \geqq \frac{m}{2\sigma}\right)$ (참)

ㄴ. $P(m \leqq X \leqq 2m) = P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{m}{2\sigma}\right)$

$\frac{1}{2}P(2m \leqq Y \leqq 3m) = \frac{1}{2}P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{m}{\sigma}\right)$

$P(m \leqq X \leqq 2m) \neq \frac{1}{2}P(2m \leqq Y \leqq 3m)$

(거짓)

ㄷ. $P\left(Z \geqq \frac{a-m}{2\sigma}\right) + P\left(Z \leqq \frac{b-2m}{\sigma}\right) = 1$이 되려면 $\frac{a-m}{2\sigma} = \frac{b-2m}{\sigma}$ 이다.

$\therefore\ b = \frac{a+3m}{2}$ (참)

**30. [출제의도] 이항분포의 평균과 분산을 이용한 수학내적 문제해결하기**

확률변수$X$는 $B(n,\ p)$인 이항분포를 따르므로

$E(X) = \frac{n}{2},\ V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{n}{4}$

$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \cdot P(X=k)$

$= \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2k + 1) \cdot P(X=k)$

$= E(X^2) + 2E(X) + 1 = 451$

따라서 $n = 40$

## 이산수학 정답

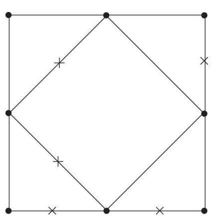
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | ⑤ | 27 | ⑤ | 28 | ③ | 29 | ② | 30 | 66 |

**26. [출제의도] 경우의 수 계산하기**

$\frac{4!}{3!} \times 3 = 12$ 가지

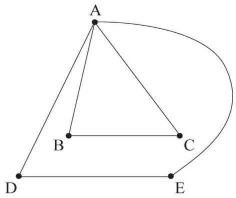
**27. [출제의도] 수형도의 구성 원리 이해하기**

5개



**28. [출제의도] 여러 가지 그래프의 성질에 관한 수학내적 문제해결하기**

ㄱ. 평면그래프이다.(참)




ㄴ. A − B − C − A − D − E − A인 오일러회로가 있다. (참)

ㄷ. B − C − A − D − E, B − C − A − E − D
C − B − A − D − E, C − B − A − E − D
해밀턴경로는 4개가 있다. (거짓)

**29. [출제의도] 세 항 사이의 관계를 이용하여 항의 규칙성 추론하기**

각 항의 일의 자리의 수를 $a_1$부터 나열하면

2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, ⋯이므로

$a_{n+2}$(일의 자리의 수)$= a_{n+8}$(일의 자리의 수)

($n$은 자연수)

$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 일의 자리의 수는 3

**30. [출제의도] 수의 규칙성을 이용한 수학외적 문제해결하기**

$5! - (4! + 4! + 4!) + (3! + 3! + 3!) = 66$

## "나"형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ① | 3 | ④ | 4 | ① | 5 | ④ |
| 6 | ⑤ | 7 | ③ | 8 | ② | 9 | ④ | 10 | ③ |
| 11 | ③ | 12 | ④ | 13 | ③ | 14 | ① | 15 | ② |
| 16 | ⑤ | 17 | ⑤ | 18 | 17 | 19 | 12 | 20 | 15 |
| 21 | 64 | 22 | 20 | 23 | 756 | 24 | 11 | 25 | 35 |
| 26 | ④ | 27 | ③ | 28 | ② | 29 | ② | 30 | 10 |

## 해설

**1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기**

$\log_4 \frac{16}{9} + \log_2 3 = \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 3 = 2$

**2. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기**

$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n+3} - n)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n+3} - n)(\sqrt{n^2+2n+3} + n)}{\sqrt{n^2+2n+3} + n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} = 1$

**3. [출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 곱셈의 성질 이해하기**

$X^{-1}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로 $X\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

$X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$이므로 $X^2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = X\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

∴ 성분의 합은 11

**4. [출제의도] 진법을 활용한 수열의 합 계산하기**

자연수 $n$을 2진법으로 나타내면

$1_{(2)}, 10_{(2)}, 11_{(2)}, 100_{(2)}, 101_{(2)}, 110_{(2)}, \cdots$

$\{a_n\}$은 1, 0, 1, 0, 1, 0,⋯

$\therefore \sum_{k=1}^{30} ka_k = 1 + 3 + 5 + \cdots + 29 = 225$

**5. [출제의도] 행렬의 거듭제곱의 성질 이해하기**

$A^{10} = \begin{pmatrix}1 & 10m\\0 & 1\end{pmatrix}$

$BX = AB$이면 $X = B^{-1}AB$

$X^{10} = B^{-1}A^{10}B$

$X^{10}$의 모든 성분의 합 $10m + 2 = 52$

$\therefore\ m = 5$

**6. [출제의도] 내분점을 이용하여 지수함수의 그래프 이해하기**

$P(a,\ 4^a)$이라 하자.

원점 O와 점 $P(a,\ 4^a)$을 $1:3$으로 내분하는 점 $\left(\frac{a}{4},\ \frac{4^a}{4}\right)$이 $g(x) = 2^x$ 위의 점이므로

$2^{2a-2} = 2^{\frac{a}{4}}$ $\quad\therefore a = \frac{8}{7}$

**7. [출제의도] 등차수열의 합의 성질 이해하기**

$\{\theta_n\}$이 등차수열이므로 $A_n$ 도 등차수열이다.

$\sum_{k=1}^{n} A_k = \frac{n(A_1 + A_n)}{2} = A$

$A_1 + A_n = \frac{1}{5}A$ 이므로 $n = 10$

**8. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질 추론하기**

ㄱ.(반례) $x = 2,\ m = 2,\ n = 3$일 때

$f(2^{2+3}) = f(32) = 1$

$f(2^2) + f(2^3) = f(4) + f(8) = 0$ (거짓)

ㄴ.(반례) $a = 6$일 때 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\log x + \log x^2 + \cdots + \log x^n$

$= f(x) + f(x^2) + \cdots + f(x^n)$

$+ g(x) + g(x^2) + \cdots + g(x^n)$

$\frac{n(n+1)}{2}\log x = f(x) + f(x^2) + \cdots + f(x^n) + 1$ (참)

**9. [출제의도] 연립방정식과 행렬의 관계 이해하기**

$c = -\frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b,\ d = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b$

$M\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$M + M^{-1}$의 모든 성분의 합은 $2\sqrt{2}$

**10. [출제의도] 지수 방정식 계산하기**

$a^{6xyz} = 7^{6yz},\ b^{6xyz} = 7^{3xz},\ c^{6xyz} = 7^{2xy}$

$(abc)^{6xyz} = 7^{12xyz} = 7^{6yz+3xz+2xy}$

$\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 12$

**11. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기**

(1) $n = 1$일 때,

(좌변)$= \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \boxed{N!}$

(우변)$= \frac{N+1}{N+1}a_1 = a_1 = \boxed{N!}$

이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n = m$ 일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{N+m}{N+1}a_m$ 이다.

$n = m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{N+m}{N+1}a_m + a_{m+1}$

$= \frac{N+m}{N+1}a_m + \boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$

$= \frac{1}{N+1} \times \frac{(m+N)!}{(m-1)!} + \boxed{\frac{(m+N)!}{m!}}$

$= \frac{1}{N+1}\left\{ \boxed{\frac{(m+N+1)!}{m!}} \right\}$

$= \frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}$

**12. [출제의도] 확률을 이용한 수학외적 문제해결하기**

임의로 한 상자를 택하는 확률 : $\frac{1}{n}$

상자에서 구슬 2개 꺼낼 때, 흰 구슬이 나올 확률

[상자1] 확률 : 0

[상자2] 확률 : $\frac{{}_2C_2}{{}_nC_2}$

[상자3] 확률 : $\frac{{}_3C_2}{{}_nC_2}$

⋮

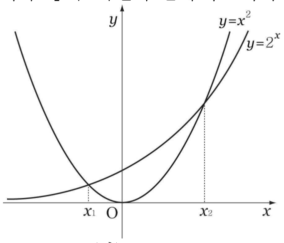
[상자$n$] 확률 : $\frac{{}_nC_2}{{}_nC_2}$

$P_n = \frac{1}{n} \times \frac{{}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots + {}_nC_2}{{}_nC_2} = \frac{{}_{n+1}C_3}{n \cdot {}_nC_2}$

$= \dfrac{n+1}{3n}$

$\mathrm{P}_{10} = \dfrac{11}{30}$

**13. [출제의도] 두 곡선의 관계 추론하기**




ㄱ. $-1 < x_1 < 0$ (참)

ㄴ. $|x_1 y_1| < |x_2 y_2|$ (거짓)

ㄷ. $|x_1 \cdot y_2| - |x_2 \cdot y_1| = |x_1 \cdot {x_2}^2| - |x_2 \cdot {x_1}^2|$
$= |x_1 \cdot x_2|(|x_2| - |x_1|) > 0$ (참)

**14. [출제의도] 도형의 규칙성을 추론하여 수학내적 문제해결하기**

$\mathrm{S}_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{3}\times 3^2 + \dfrac{2\pi}{3}\times 2^2 + \dfrac{2\pi}{3}\times 1^2\right)$

$= \dfrac{\pi}{3}(3^2 + 2^2 + 1^2)$

$\mathrm{S}_4 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\times 4^2 + \dfrac{\pi}{2}\times 3^2 + \dfrac{\pi}{2}\times 2^2 + \dfrac{\pi}{2}\times 1^2\right)$

$= \dfrac{\pi}{4}(4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2)$

$\vdots$

$\mathrm{S}_{20} = \dfrac{\pi}{20}(20^2 + 19^2 + \cdots + 1^2)$

$= \dfrac{287\pi}{2}$

**15. [출제의도] 상용로그의 가수의 성질을 이용한 수학내적 문제해결하기**

$2^4 \times 3^3$은 20개의 양의 약수를 갖는다.

약수들의 곱 $\mathrm{A} = (2^4 \times 3^3)^{10} = 2^{40} \times 3^{30}$

$\left[\dfrac{\mathrm{A}}{10^{n-1}}\right]$는 A의 최고자리의 숫자이고

$\log \mathrm{A} = 40\log 2 + 30\log 3 = 26.353$이다.

$\log 2 < 0.353 < \log 3$이므로

$\left[\dfrac{\mathrm{A}}{10^{n-1}}\right] = 2$

**16. [출제의도] 순열과 조합의 경우의 수를 이용하여 수학내적 문제해결하기**

남자 3명, 여자 1명인 경우 : ${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot 4! = 720$

남자 2명, 여자 2명인 경우 : ${}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot 4! = 720$

남자 1명, 여자 3명인 경우 : ${}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 \cdot 4! = 120$

따라서, 구하는 경우의 수는 1560(가지)이다.

**17. [출제의도] 역행렬의 존재성 추론하기**

ㄱ. 두 직선이 만나지 않으면 $a = c,\ b \neq d$
$\therefore\ ad - bc \neq 0$ (참)

ㄴ. 두 직선이 일치하면 $a = c,\ b = d$
$\therefore\ ad - bc = 0$ (참)

ㄷ. 두 직선이 $x$축 위에서 만나면 $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{d}{c}$
$\therefore\ ad - bc = 0$ (참)

**18. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기**

$a > 0,\ a \neq 1$인 $a$에 대하여,

$\left\{\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}} \times \sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6$

$= \left(a^{\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + 2}\right)^6 = \left(a^{\frac{17}{6}}\right)^6 = a^{17} \qquad \therefore k = 17$

**19. [출제의도] 등차중항의 성질 이해하기**

$a_n = an + b$라 하면,

$b_n = a_{3n-2} + 2a_{3n-1} + a_{3n}$
$= 4a_{3n-1} = 12an - 4a + 4b$

$A_n = \dfrac{an(n+1)}{2} + bn$

$B_n = \dfrac{12an(n+1)}{2} - (4a - 4b)n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{B_n}{A_n} = 12$

**20. [출제의도] 무한등비수열의 극한의 성질 이해하기**

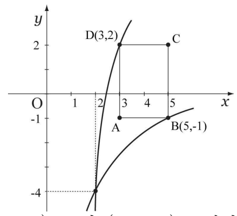
수열 $\{a_n\}$의 첫째항 $a$, 공비 $r$ 이라면

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{ar^{n-1}(1-r)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1-r} \cdot \dfrac{1-r^n}{r^{n-1}} = -\dfrac{r}{1-r} = \dfrac{15}{14}$

$\therefore\ r = 15$

**21. [출제의도] 로그함수의 밑의 성질을 이용한 그래프 이해하기**




$y = \log_a(x-1) - 4$가 $(2,\ -4)$를 항상 지나므로 직사각형과 만나려면 $a > 1$

따라서, $y = \log_a(x-1) - 4$는 증가함수이므로

B$(5,\ -1)$을 지날 때, $a$의 최댓값 $M = 4^{\frac{1}{3}}$

D$(3,\ 2)$를 지날 때, $a$의 최솟값 $N = 2^{\frac{1}{6}}$

$\left(\dfrac{M}{N}\right)^{12} = 64$

**22. [출제의도] 역행렬을 이용한 연립방정식의 문제해결과정 이해하기**

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^{y-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^{y-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 27 \end{pmatrix}$

$a = 5,\ b = 4 \qquad \therefore\ ab = 20$

**23. [출제의도] 경우의 수를 이용한 수학외적 문제해결하기**

10가지 중 8장의 표를 사는 경우: ${}_{10}\mathrm{C}_8$

8장을 3장, 3장, 2장으로 나누어 갖는 경우

: ${}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{2!} \times 3!$

$\therefore\ x = {}_{10}\mathrm{C}_8 \times {}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{2!} \times 3! = 75600$

$\therefore\ \dfrac{x}{100} = 756$

**24. [출제의도] 무한등비급수를 이용한 수학내적 문제해결하기**

$\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{A}_2 = \triangle \mathrm{OO}_1\mathrm{A}_1 + \triangle \mathrm{OO}_1\mathrm{A}_2 + \triangle \mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$

$\dfrac{1}{2} \times 2 \times 4 = \dfrac{1}{2} \times r_1 \times (6 + 2\sqrt{5}) \ \therefore r_1 = 3 - \sqrt{5}$

$\triangle \mathrm{OA}_2\mathrm{A}_3 = \triangle \mathrm{OO}_2\mathrm{A}_2 + \triangle \mathrm{OO}_2\mathrm{A}_3 + \triangle \mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$

$\dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = \dfrac{1}{2} \times r_2 \times (3 + \sqrt{5})$

$\therefore\ r_2 = \dfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

따라서 $r_n = (3 - \sqrt{5})\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n = 6 - 2\sqrt{5}$이므로 $a + b = 11$

**25. [출제의도] 확률을 이용한 수학외적 문제해결하기**

전구가 $n$개 켜져 있을 경우 1열, 2열, 3열, 4열은 각각 $n$, $4n$, $16n$, $64n$의 수를 나타내고, 전광판이 나타내는 수가 짝수일 사건은 홀수인 사건의 여사건이다.

홀수일 확률은 1열에서 1개, 나머지 열 중에서 1개 켜질 때이므로

$\therefore\ \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_9\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_2} = \dfrac{9}{22}$

따라서, 구하는 확률은 $1 - \dfrac{9}{22} = \dfrac{13}{22}$

$p + q = 35$

**26. [출제의도] 근의 분리를 이용한 지수부등식 이해하기**

$f(x) = (2^x)^2 - (k+1)2^x + 4 \geq 0$

$g(t) = t^2 - (k+1)t + 4 \geq 0 \ (t = 2^x > 0)$

(1) $y = g(t)$의 대칭축이 양수 일 때,
$-1 < k \leq 3$

(2) $y = g(t)$의 대칭축이 음수 일 때,
$k < -1$

(3) $k = -1$일 때, $g(t) = t^2 + 4 > 0$

(1), (2), (3)에서 $k \leq 3$

**27. [출제의도] 로그함수의 그래프를 해석하여 수학내적 문제해결하기**

D$(1,\ 0)$, A$(2^{-k},\ k)$, B$(2^k,\ k)$ 이므로

$\mathrm{S}_1 = \dfrac{1}{2}(1 - 2^{-k})k,\ \mathrm{S}_2 = \dfrac{1}{2}(2^k - 1)k,$

$\mathrm{S}_3 = \dfrac{1}{2}(2^k - 2^{-k})k$

$S_1,\ S_2,\ S_3$는 등차수열이므로 $2S_2 = S_1 + S_3$.

대입하여 풀면 $k = 1$

**28. [출제의도] 수열의 규칙성 추론하기**

$a_1 = 5\times 6^5 + 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6 + 5$

$a_2 = 5\times 6^5 + 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6 + 4$

$a_3 = 5\times 6^5 + 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6 + 3$

$a_4 = 5\times 6^5 + 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6 + 2$

$a_5 = 5\times 6^5 + 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6 + 1$

$a_6 = 5\times 6^5 + 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6 + 0$

$a_7 = 5\times 6^4 + 5\times 6^3 + 5\times 6^2 + 5\times 6^1 + 5$

$\vdots$

따라서 위와 같은 규칙에 의해서 $a_{35} = 1$

**29. [출제의도] 조건부확률을 이용한 수학외적 문제해결하기**

A형에 사는 여학생수를 $x$라 하면

B형에 사는 남학생수를 $2x$이다

A형에 사는 학생 중 여학생의 비율이 $\dfrac{2}{5}$이므로

A형에 사는 남학생수와 전체 학생수는 각각 $\dfrac{3}{2}x,\ \dfrac{5}{2}x$ 이다.

따라서, 남학생일 사건을 $Y$, A형에 주거할 사건을 $X$라 하면

$\therefore \mathrm{P}(X \mid Y) = \dfrac{\mathrm{P}(X \cap Y)}{\mathrm{P}(Y)} = \dfrac{3}{7}$

**30. [출제의도] 수열의 일반항과 극한을 이용한 수학내적 문제해결하기**

$\{a_n\}$: 12, 33, 64, $\cdots$

따라서

$a_n = 12 + \dfrac{(n-1)\{42 + (n-2)10\}}{2}$

$= (n+1)(5n+1)$

$b_n = 2n^2 + 4n = 2n(n+2)$ 이므로

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{n^4} = 10$