수리 영역(나 형)

제 2 교시

성명		수험번호						3				

- 먼저 수험생이 선택한 유형의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
- 답안지에 성명, 수험 번호, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

---

1. $2\log\frac{3}{5}+\log\frac{1}{2}-\log 18$의 값은? [2점]

① -2
② -1
③ 0
④ 1
⑤ 2

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 $X-B=3(X-2A)+B$를 만족하는 행렬 X는? [2점]

① $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
② $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
③ $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
⑤ $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

3. 함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^{2n}}{x^{2n}+2}$으로 정의할 때, $f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [3점]

① -2
② $-\frac{1}{2}$
③ 0
④ $\frac{1}{2}$
⑤ 2

4. 역행렬을 갖는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $ABA^{-1}=B$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

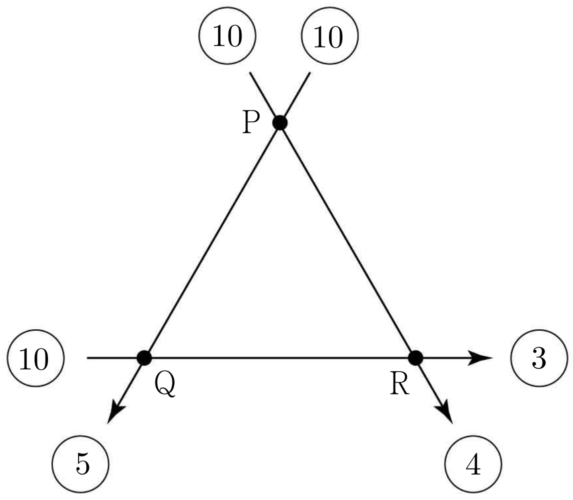
ㄱ. $A^{-1}B=BA^{-1}$
ㄴ. $(B^3)^{-1}=A(B^{-1})^3A^{-1}$
ㄷ. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{pmatrix} a+1 & 2-b \\ b+2 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$이 $x=y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형의 둘레의 길이는? [3점]

① 2π
② $2\sqrt{2}\,\pi$
③ $2\sqrt{3}\,\pi$
④ 4π
⑤ $2\sqrt{5}\,\pi$

6. 컴퓨터 단층촬영은 X선을 투사하여 원하는 지점의 흡수 정도를 측정하여 영상화한다. 그림은 투사한 X선의 양이 각각 10일 때 세 지점 P, Q, R를 통과하고 나온 후의 X선의 양을 나타낸 것이다. X선이 P, Q, R 지점을 한 번 통과할 때마다 각 지점에서 흡수된 양을 각각 p, q, r라 하고 연립일차방정식을 세워 행렬로 표현하면 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$이다. 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은? (단, X선은 동시에 투사하지 않으며 투사한 X선은 직진하고 X선의 양은 각 지점에 흡수된 양을 제외하고는 소실되지 않는다고 가정한다.) [3점]



① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

7. 수렴하는 무한급수만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. $3^{2x}-3^{x+1}=-1$일 때, $\dfrac{3^{4x}+3^{-4x}+1}{3^{2x}+3^{-2x}+1}$의 값은? [4점]

① 3
② 4
③ 5
④ 6
⑤ 7

9. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

i) $n=1$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 성립한다고 가정하면

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$$ 이다.

$n=k+1$일 때,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\boxed{(다)}$$
$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$ 이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$
②	1	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$
③	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$
④	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$
⑤	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$	$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

10. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차와 각 항이 0이 아닌 실수일 때, 방정식 $a_{n+2}x^2+2a_{n+1}x+a_n=0$의 한 근을 b_n이라 하면 등차수열 $\left\{\frac{b_n}{b_n+1}\right\}$의 공차는? (단, $b_n\neq -1$) [4점]

① $-\frac{1}{2}$
② $-\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{4}$
⑤ $\frac{1}{2}$

11. $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2+\cdots+(4n)^2}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{2}$
④ 1
⑤ 2

12. 자연수 m에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\left[\frac{n}{m}\right]$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $m=2$일 때, $a_5=2$이다.

ㄴ. $m=3$일 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k=1683$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{mn} a_k=\frac{n(mn-m+2)}{2}$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 이차정사각행렬 A가 $A^2+A=3E$를 만족할 때, $A-3E$의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}(A+3E)$

② $\frac{1}{3}(A-3E)$

③ $\frac{1}{3}(A+3E)$

④ $-\frac{1}{9}(A-4E)$

⑤ $-\frac{1}{9}(A+4E)$

14. 자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x\le y)$과 같이 $\frac{1}{n}$을 두 분수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어,

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$이므로 $a_1=1$,

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$이므로 $a_2=2$,

$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$이므로 $a_3=2$이다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x\le y)$라 하면 $xy=n(x+y)$이다.

따라서 $(x-n)(y-n)=n^2\cdots\cdots(*)$ 이므로 $x-n$과 $y-n$은 n^2의 약수이다.

$d(n)$을 n의 양의 약수의 개수라 하고, 방정식 $(*)$의 해의 개수를 구하면

i) $x=y$인 경우,

$x=y=$ (가) 이므로 1개이다.

ii) $x<y$인 경우,

$x=y=$ (가) 이 제외되므로 $\frac{\text{(나)}}{2}$ 개이다.

그러므로 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ $(x\le y)$로 표시할 수 있는 방법의 수는 (다) 개이다.

따라서 구하는 수열의 일반항 $a_n=$ (다) 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	n	$d(n^2)$	$\frac{d(n^2)+1}{2}$
②	n	$d(n^2)-1$	$\frac{d(n^2)}{2}+1$
③	$2n$	$d(n^2)-1$	$\frac{d(n^2)+1}{2}$
④	$2n$	$d(n^2)-1$	$\frac{d(n^2)}{2}+1$
⑤	$2n$	$d(n^2)$	$\frac{d(n^2)}{2}+1$

15. 세 집합

$X=\{x\,|\,x>0\}$, $Y=\{y\,|\,y$ 는 정수$\}$, $Z=\{z\,|\,0\le z<1\}$

에 대하여 두 함수 $f: X\to Y$, $g: X\to Z$가 다음을 만족한다.

집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $10^{f(x)+g(x)}=x$이다.

$f(a)=3$을 만족하는 양수 a에 대하여 $g(a)+g(\sqrt{a})=1$이 되는 a의 값은? [4점]

① $10^{\frac{13}{4}}$
② $10^{\frac{10}{3}}$
③ $10^{\frac{7}{2}}$
④ $10^{\frac{11}{3}}$
⑤ $10^{\frac{15}{4}}$

16. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 임의의 자연수 n에 대하여 $A^{n+1}=A^{n+2}+A^n$을 만족할 때, A^{2009}을 간단히 하면? [4점]

① $-A^3$
② $-A^2$
③ A
④ A^2
⑤ A^3

17. 다음과 같이 규칙적으로 나열된 수가 있다.

1행	1					
2행	$\frac{1}{3}$	1				
3행	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3}$	1			
4행	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3}$	1		
⋮		⋮				
10행	$\frac{1}{3^9}$	$\frac{1}{3^8}$	$\frac{1}{3^7}$		$\cdots$	1

1행부터 10행까지의 수를 모두 더한 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right\}$
② $\frac{3}{2}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right\}$
③ $\frac{3}{4}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$
④ $\frac{3}{2}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$
⑤ $\frac{3}{2}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\right\}$

단답형

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{5n+5}=5$가 성립하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [2점]

19. $\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$가 정의되기 위한 모든 정수 x의 합을 구하시오. [3점]

20. 과거 n년 동안 매출액이 a원에서 b원으로 변했을 때 연평균 성장률은

$$(\text{연평균 성장률})=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1$$

로 나타내어진다. 다음은 두 회사 A, B의 매출액을 나타낸 표이다.

(단위 : 억 원)

회사명	1998년 말	2008년 말
A	100	200
B	121	484

이때, 1998년 말부터 2008년 말까지 10년 동안 B 회사의 연평균 성장률은 A 회사의 k배이다. $100k$의 값을 구하시오. (단, $2^{\frac{11}{10}}=2.14$로 계산한다.) [3점]

21. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=40$, $a_8=30$일 때, $|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|$이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

22. 행렬 $M=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$에 대하여 $MA+B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\3 & -6\end{pmatrix}$이다. 행렬 B의 모든 성분의 합이 18일 때, 행렬 A의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

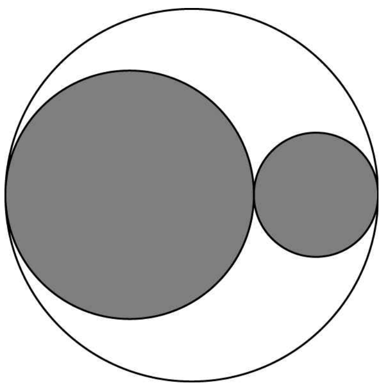
23. 좌표평면 위의 두 점 A$(0,0)$, B$(5,0)$과 1보다 큰 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=1:n$을 만족하는 점 P$(x,y)$들의 집합을 T_n이라 하자. 집합 T_n의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 $M(n)$이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10M(n)}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

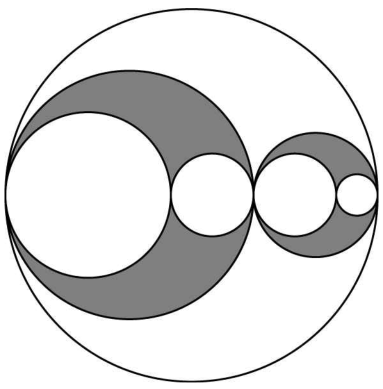
24. 갑은 절약하는 습관을 기르기 위하여 연초부터 가계부를 적기로 하였다. 1월의 외식비와 의류구입비를 합하여 보니 30만원이었다. 매달 외식비와 의류구입비를 지난달에 비해 각각 20%, 30%씩 줄였더니 2개월 후에는 외식비와 의류구입비의 합이 15만원 절감되었다. 1월의 외식비를 x만원, 의류구입비를 y만원이라 하면 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}30\\15\end{pmatrix}$이다. 행렬 A의 $(2,1)$성분이 $\frac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [3점]

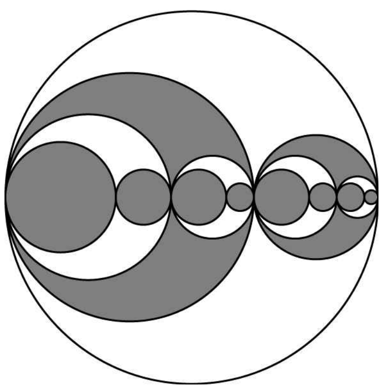
25. 원에 다음 과정을 실행한다.

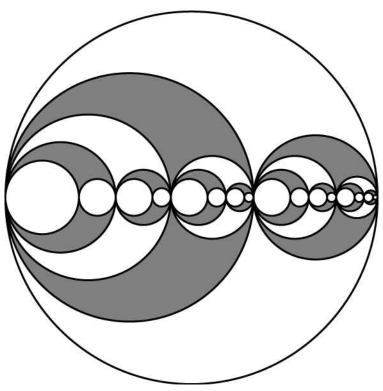
> [과정]
> Ⅰ. 원의 지름을 2 : 1로 내분하는 점을 잡는다.
> Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다.
이 원에 [과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자.
그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자.
그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자.
그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각 [과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_4라 하자.
이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}\pi$ (p와 q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.) [4점]


C_1


C_2


C_3


C_4

⋯

5지선다형

26. 두 양수 a, b에 대하여 $2^a = c$, $2^b = d$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $c^b = d^a$

ㄴ. $a+b = \log_2 cd$

ㄷ. $\frac{a}{b} = \log_c d$

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

27. $\sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=2}^{12} k^2 + \sum_{k=3}^{12} k^2 + \cdots + \sum_{k=12}^{12} k^2$의 값은? [4점]

① 3376
② 4356
③ 5324
④ 5840
⑤ 6084

28. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1 = 2,\ na_{n+1}a_n = (n+1)^2 a_n - n^2 a_{n+1}$$

으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [4점]

① 0

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ 2

⑤ 3

29. 어떤 농산물은 유통과정을 한 번 거칠 때마다 일정한 비율로 가격이 인상된다. 이 농산물의 가격 형성 과정을 조사한 결과 유통과정을 다섯 번 거친 소비자 가격은 원산지 생산 가격의 2.24배였다. 유통과정을 한 번만 거친다면 이때의 소비자 가격은 다섯 번 거친 소비자 가격의 약 몇 %인가? (단, $\log 2.24 = 0.35$, $\log 1.17 = 0.07$로 계산한다.) [4점]

① 32
② 37
③ 42
④ 47
⑤ 52

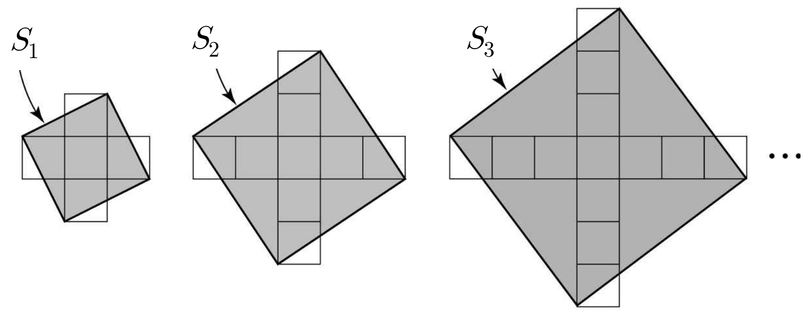
단답형

30. [그림 1]과 같이 한 개의 넓이가 1인 정사각형 5개로 이루어진 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_1이라 하자.

[그림 2]와 같이 [그림 1]의 ✤ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_2라 하자.

[그림 3]과 같이 [그림 2]의 ✤ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 ✤ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{10S_n}{n^2}$의 값을 구하시오. [4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.