2010학년도 대학수학능력시험 대비

2009학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	①	2	④	3	④	4	④	5	②
6	④	7	②	8	④	9	⑤	10	⑤
11	①	12	③	13	③	14	⑤	15	①
16	③	17	⑤	18	36	19	165	20	220
21	24	22	10	23	23	24	490	25	840
26	③	27	②	28	②	29	①	30	12

해 설

1. **[출제의도] 유리수인 지수의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$9^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$

2. **[출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-7&4\\6&-2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 1이다.

3. **[출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$

4. **[출제의도] 등비수열의 일반항을 알고 있는가를 묻는 문제이다.**

$c_n=a_nb_n$이라 하면 수열 $\{c_n\}$도 등비수열이다.

$c_n=ar^{n-1}$이라 하면

$ar^3=3$ … ㉠, $ar^6=6$ … ㉡

㉡÷㉠을 계산하면

$r^3=2$

$\therefore\ a_{16}b_{16}=c_{16}=ar^{15}=ar^3(r^3)^4=48$

5. **[출제의도] 지수부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

n년 후의 물가지수가 현재의 2배 이상이 된다면

$(1+0.04)^n\geq 2$

양변에 상용로그를 취하면

$n\log 1.04\geq\log 2$

$n\geq\frac{\log 2}{\log 1.04}=\frac{0.301}{0.017}=17.7\times\times$

따라서 18년 후에 물가지수가 처음으로 현재의 2배 이상이 된다.

6. **[출제의도] 조건부확률의 뜻을 알고 이를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(가)에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.6$

(나)에서

$\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B|A)\}=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=0.2$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=0.6-0.2=0.4$

7. **[출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(ⅰ) 두 종류의 과일을 선택하는 경우가 3가지이고, 이를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우가 6가지이므로 구하는 방법의 수는 18가지이다.

(ⅱ) 세 종류의 과일을 선택하는 경우가 3가지이고, 이를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우가 12가지이므로 구하는 방법의 수는 36가지이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는 54가지이다.

8. **[출제의도] 등비수열이 포함된 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{16^n+a^n}-4^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\sqrt{16^n+a^n}+4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{16}\right)^n}+1}$

(ⅰ) $0<a<4$일 때 0으로 수렴한다.

(ⅱ) $a=4$일 때 $\frac{1}{2}$로 수렴한다.

(ⅲ) $a>4$일 때 발산한다.

따라서 구하는 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개다.

9. **[출제의도] 로그함수의 그래프를 이해하고 이를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

점 B, C의 좌표를 각각 $\mathrm{B}(a,\ 0)$, $\mathrm{C}(b,\ 0)$이라 하고, 점 E의 x좌표를 k라 하면 $\overline{\mathrm{DG}}=1$에서

$\log_2 b=\log_2 a+1=\log_2 2a$

$\therefore\ b=2a$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DE}}=2:3$에서

$(b-a):(k-b)=2:3$

$k=\frac{5}{2}b-\frac{3}{2}a=\frac{7}{2}a$

$\square$ABCD$=\square$DEFG 에서

$(b-a)\log_2 a=k-b=\frac{3}{2}(b-a)$

$a\neq b$이므로 $a=2\sqrt{2}$, $b=4\sqrt{2}$

$\therefore\ k=\frac{7}{2}a=7\sqrt{2}$

10. **[출제의도] 조건을 만족하는 점의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$\frac{{x_{n+1}}^2-{x_n}^2}{x_{n+1}-x_n}=n$에서

$x_{n+1}+x_n=n$

그런데 $x_1=1$이므로 수열 $\{x_n\}$은

1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, …

이다. 따라서 자연수 n에 대하여

$x_{2n-1}=n$, $x_{2n}=n-1$

따라서 점 P_{2009} 즉, 점 $\mathrm{P}_{(2\times1005-1)}$의 x좌표는 1005이다.

11. **[출제의도] 무한급수를 활용하여 도형의 넓이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

사각형 $\mathrm{B_2P_1C_1P_2}$에서

$\overline{\mathrm{P_1C_1}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC_1}}=3$이므로

$S_1=\overline{\mathrm{P_1C_1}}\cdot\overline{\mathrm{C_1C_2}}=6\sqrt{3}$

모든 자연수 n에 대하여

$\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n}$이므로

$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=8\sqrt{3}$

12. **[출제의도] 역행렬의 성질을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$A(E+B)=E$에서 $A^{-1}=E+B$이므로

$A(E+B)=(E+B)A=E$

$A+AB=A+BA$

$\therefore\ AB=BA$

이때, $AB-BA=O=A+B$이므로 $B=-A$

$A(E+B)=E$에 $B=-A$를 대입하면

$A(E-A)=E$, $A^2-A+E=O$

위 등식의 양변에 $A+E$를 곱하면

$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E=O$

$\therefore\ A^3=-E$

$\therefore\ (AB)^{20}=(-A^2)^{20}=A^{40}$

$=(A^3)^{13}A=(-E)^{13}A=-A$

13. **[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$S_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $T_1=\frac{1}{2}$이므로 (*)이 성립한다.

$S_{m+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

$+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$

$=S_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$

$T_{m+1}=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}+\cdots+\frac{1}{2m+2}$

$=T_m-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$

$=T_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$

가정에서 $S_m=T_m$이므로 $S_{m+1}=T_{m+1}$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

14. [출제의도] 수열의 수렴, 발산을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=2m$일 때 $S_n=S_{2m}=0$

$n=2m-1$일 때 $S_n=S_{2m-1}=1$

ㄱ. $\lim_{m\to\infty} S_{2m} \neq \lim_{m\to\infty} S_{2m-1}$이므로 수열 $\{S_n\}$은 발산한다.

ㄴ. $\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m}}{2m}=0$, $\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m-1}}{2m-1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$ (수렴)

ㄷ. $\lim_{m\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{2m}}{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$이고,

$\lim_{m\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{2m-1}}{2m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m-1}=\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}=\frac{1}{2}$ (수렴)

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15. [출제의도] 행렬의 연산에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A\in S$이고 A^{-1}가 존재한다고 가정하자.

$A^2=O$의 양변에 $(A^{-1})^2=(A^2)^{-1}$을 곱하면 $E=O$가 되어 모순이다.

따라서 $A\in S$이면 A의 역행렬이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$의 역행렬은 존재하지 않는다.

그런데 $A^2=A\neq O$이므로 $A\not\in S$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$이면 $A^2=B^2=O$이므로 $A\in S$, $B\in S$이다.

이때 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$이고, $(AB)^2=AB\neq O$이므로 $AB\not\in S$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

16. [출제의도] 지수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$v_{\mathrm{A}}=c\left(\frac{\pi a^2}{2\pi a}\right)^{\frac{2}{3}}(0.01)^{\frac{1}{2}}=\frac{c}{10}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$,

$v_{\mathrm{B}}=c\left(\frac{\pi b^2}{2\pi b}\right)^{\frac{2}{3}}(0.04)^{\frac{1}{2}}=\frac{2c}{10}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$이므로

$$\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}=\frac{\frac{c}{10}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2c}{10}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=2$$

이때, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$이므로 $\frac{a}{b}=8$

17. [출제의도] 주어진 규칙성을 이용하여 검은 돌의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

각 행에 있는 검은 돌의 개수를 세 행씩 묶어서 생각하면

$(1, 0, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(3, 2, 3)$, $(4, 3, 4)$, $(5, 4, 5)$, $\cdots$

이므로 $a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}=3k-1$이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{k=1}^{10}(3k-1)$

$=3\times 55-10=155$

[다른 풀이]

홀수 행에 놓인 검은 돌의 개수를 차례로 나열하면 1, 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, …이다.

짝수 행에 놓인 검은 돌의 개수를 차례로 나열하면 0, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 6, …이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{30}a_n=3(1+3+5+7+9)+3(2+4+6+8)+2\times 10$

$=155$

18. [출제의도] 밑의 변환공식을 이용하여 로그를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(주어진 식) $=3\times 3\times\frac{\log 4}{\log 3}\times\frac{\log 9}{\log 2}$

$=3\times 3\times 2\times 2=36$

19. [출제의도] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(x-1)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r(-1)^{n-r}x^r$

이므로 x^2의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_2(-1)^{n-2}$이다.

$\therefore {}_n\mathrm{C}_2(-1)^{n-2}=-55$

$\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)^{n-2}=-55$

에서 $n=11$이므로 x^3의 계수는

${}_{11}\mathrm{C}_3(-1)^{11-3}=\frac{11\times 10\times 9}{3\times 2\times 1}=165$

20. [출제의도] 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 이를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르고, 시행의 횟수가 충분히 크므로 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq k)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{k-200}{10}\right)=0.9772$이고

$\mathrm{P}(Z\leq 2)=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

이므로 $\frac{k-200}{10}=2$

$\therefore k=220$

21. [출제의도] 주어진 상황에서 일어날 수 있는 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꼭짓점의 위치에 있는 원에 들어가는 수를 각각 a, b, c라 할 때, 각 변에 있는 세 수의 합이 모두 같으므로 $1+2+3+4+5+6+a+b+c$의 값이 3의 배수가 되어야 한다.

따라서 $a+b+c$의 값도 3의 배수가 되어야 한다.

이 중에서 가능한 집합 $\{a,\ b,\ c\}$는

$\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$, $\{4,\ 5,\ 6\}$이고,

이 네 개의 집합에 대하여 숫자를 배열하는 경우의 수는 각각 6가지이므로 구하는 방법의 수는 $4\times 6=24$(가지)이다.

22. [출제의도] 행렬의 거듭제곱의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}m^2&0\\m^2-5^2&5^2\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}m^3&0\\m^3-5^3&5^3\end{pmatrix}$

$\vdots$

이므로 $A^n=\begin{pmatrix}m^n&0\\m^n-5^n&5^n\end{pmatrix}$임을 추론할 수 있다.

따라서 A^n의 모든 성분의 합은 $2m^n=2^{49}$이다.

$\therefore m^n=2^{48}$

이때, m, n은 자연수이므로 n은 $48=2^4\times 3$의 약수이다.

따라서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$(4+1)(1+1)=10$이다.

23. [출제의도] 확률분포표를 이해하고 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$20a^2+10a^2+3a=\frac{3}{5}$에서 $a=\frac{1}{10}$

X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{3}{10}=\frac{13}{10}$

$\therefore p+q=23$

24. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $5\leq\log k<6$ 이므로

$10^5\leq k<10^6$ … ㉠

(나)에서 $\log\frac{\sqrt{k}}{7}$의 가수가 0이므로

$\log\frac{\sqrt{k}}{7}=n$ (n은 정수)

따라서 $\frac{\sqrt{k}}{7}=10^n$이므로

$k=49\times 10^{2n}$

㉠에서 $n=2$이므로

$k=49\times 10^4=490000$

$\therefore \frac{k}{1000}=490$

25. [출제의도] 주어진 규칙성을 활용하여 직선들의 교점의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

구하는 $a_{15}-a_{14}$의 값은 2단계, 4단계, 6단계, …, 14단계에서 그린 직선의 총 개수와 15단계에서 그린 직선의 개수의 곱과 같다.

$\therefore a_{15}-a_{14}=15\times(2+4+6+\cdots+14)=840$

26. [출제의도] 로그부등식을 이용하여 실수의 대소를 비교할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a<b<1$에서

$\log_a a>\log_a b>\log_a 1$

$\therefore 0<\log_a b<1$ … ㉠

$a+1>1$에서

$\log_b(a+1)<\log_b 1=0$ … ㉡

$1<a+1<b+1$ 에서

$\log_{a+1}(a+1)<\log_{a+1}(b+1)$

$\therefore \log_{a+1}(b+1)>1$ … ㉢

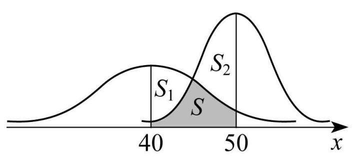
㉠, ㉡, ㉢에서

$\log_b(a+1) < \log_a b < \log_{a+1}(b+1)$

$\therefore\ B < A < C$

27. [출제의도] 정규분포곡선을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 어두운 부분의 넓이를 S라 하자.



$S_1 = \mathrm{P}(40 \leq X \leq 50) - S$

$S_2 = \mathrm{P}(40 \leq Y \leq 50) - S = \mathrm{P}(50 \leq Y \leq 60) - S$

$\therefore\ S_2 - S_1 = \mathrm{P}(50 \leq Y \leq 60) - \mathrm{P}(40 \leq X \leq 50)$

$= \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{60-50}{5}\right) - \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \dfrac{50-40}{10}\right)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2) - \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$

28. [출제의도] 무한수열과 무한급수의 수렴, 발산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$ 이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$라고 하면 $b_n = 2 + \dfrac{1}{n} - a_n$에서

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n} - a_n\right) = 2 - \alpha$이다. (참)

ㄷ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이므로 ㄴ에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$이다.

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

29. [출제의도] 독립시행의 확률을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A 대학교에 합격하려면 수시모집에서 합격하거나, 수시모집에서 불합격하고 정시모집에서 합격해야 하므로 한 학생이 A 대학교에 합격할 확률은

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$이다.

따라서 3명 중 2명이 합격할 확률은

${}_3\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4}{9}$이다.

30. [출제의도] 서로 독립인 사건의 뜻을 이해하고 이를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

k의 값에 따른 확률을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(A)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\mathrm{P}(B)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{P}(A\cap B)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$를 만족할 때, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 이를 만족하는 상수 k의 값은 2, 4, 6이다. 따라서 모든 k의 값의 합은 12이다.

수리'나'형 정답

1	①	2	④	3	⑤	4	④	5	①
6	②	7	③	8	④	9	④	10	⑤
11	②	12	③	13	③	14	⑤	15	①
16	③	17	⑤	18	36	19	100	20	33
21	34	22	10	23	80	24	490	25	840
26	②	27	①	28	⑤	29	②	30	25

해 설

1. '가'형과 동일

2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\{(n+2)-n\}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\{(n+1)-n\}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}$

$= 2\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 2$

4. '가'형과 동일

5. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$x = \sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$이므로

$x^n = 2^{\frac{n}{4}}$이 세 자리의 자연수이려면

$2^{\frac{n}{4}} = 2^7,\ 2^{\frac{n}{4}} = 2^8,\ 2^{\frac{n}{4}} = 2^9$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n의 값은 4×7, 4×8, 4×9이므로 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4(7+8+9) = 96$이다.

6. [출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구하면

$c = \dfrac{2b+a}{3}$, $d = 2b - a$

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$ad - bc = (2ab - a^2) - \dfrac{ab + 2b^2}{3}$

$= -\dfrac{3a^2 - 5ab + 2b^2}{3}$

$= -\dfrac{(3a-2b)(a-b)}{3} = 0$

이때, $a \neq b$이므로 $3a - 2b = 0$

$\therefore\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{2}$

7. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (α는 상수)로 놓으면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

$a_n + 2 < 3a_{n+1} < 2a_n + 1$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + 2) \leqq \lim\limits_{n\to\infty}(3a_{n+1}) \leqq \lim\limits_{n\to\infty}(2a_n + 1)$,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 2 \leqq 3\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \leqq 2\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1$

$\therefore\ \alpha + 2 \leqq 3\alpha \leqq 2\alpha + 1$

$\alpha + 2 \leqq 3\alpha$에서 $\alpha \geqq 1$ … ㉠

$3\alpha \leqq 2\alpha + 1$에서 $\alpha \leqq 1$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha = 1$

8. '가'형과 동일

9. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\log\dfrac{x}{y} = \log x - \log y = 7$이므로 $\dfrac{x}{y} = 10^7$이다.

따라서 $\dfrac{x}{y}$의 값은 자연수이다. (참)

ㄴ. $\log x = \log(a\times10^m) = m + \log a = 5 + 0.65$에서

$m = 5$, $\log a = 0.65$

$\log y = \log(b\times10^n) = n + \log b = -2 + 0.65$에서

$n = -2$, $\log b = 0.65$

$\therefore\ m + n = 3$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $\log ab = \log a + \log b = 1.3$이므로

$ab = 10^{1.3} > 10$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10. '가'형과 동일

11. [출제의도] 분수식이 들어 있는 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n = \left\{\dfrac{3n}{2} - (n+1)\right\} \times \dfrac{n}{2} = \dfrac{n-2}{2} \times \dfrac{n}{2}$ ($n \geqq 3$)

$\therefore\ \sum\limits_{n=3}^{10} \dfrac{1}{a_n} = 4\sum\limits_{n=3}^{10} \dfrac{1}{(n-2)n}$

$= 2\sum\limits_{n=3}^{10}\left(\dfrac{1}{n-2} - \dfrac{1}{n}\right)$

$= 2\left\{\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots\right.$

$\left. + \left(\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{9}\right) + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{10}\right)\right\}$

$= 2\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{10}\right)$

$= \dfrac{116}{45}$

12. '가'형과 동일

13. '가'형과 동일

14. '가'형과 동일

15. ‘가’형과 동일

16. ‘가’형과 동일

17. ‘가’형과 동일

18. ‘가’형과 동일

19. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 등차수열의 공차를 d라 하자.

$a_2+a_4=2a_3$이므로 주어진 식을 정리하면

$a_5-a_3=2d=4$이다.

$\therefore\ d=2$

따라서 $a_1=1$, $a_{10}=1+(10-1)\times 2=19$이므로

구하는 합은 $\dfrac{10(1+19)}{2}=100$이다.

20. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$이므로 $A^3=-E$이다.

$\therefore\ A^6=E$

그런데 $(A^n)^2=A^{2n}=E$이므로 n은 3의 배수이어야 한다.

따라서 구하는 100 이하의 자연수 n은 33개다.

21. [출제의도] 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(n+6)^2=n^2+12n+36$

$\quad\quad\quad\ =6(2n+6)+n^2$

이므로 $a_{n+6}=a_n$이 성립한다.

또, $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=1$, $a_6=0$이므로

$a_n=4$를 만족시키는 자연수 n은

2 또는 $n=6k\pm 2$ (k는 자연수)이다.

따라서 구하는 100 이하의 자연수 n은

2, 4, 8, 10, ⋯, 94, 98, 100의 34개다.

22. ‘가’형과 동일

23. [출제의도] 로그의 뜻을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$10\le n<16$일 때 $2<\log_3 n<3$, $1<\log_4 n<2$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 각각 2, 1이다.

$16\le n<27$일 때 $2<\log_3 n<3$, $2\le\log_4 n<3$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 2로 같다.

$27\le n<64$일 때 $3\le\log_3 n<4$, $2<\log_4 n<3$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 각각 3, 2이다.

$64\le n<81$일 때 $3<\log_3 n<4$, $3\le\log_4 n<4$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 3으로 같다.

$81\le n<100$일 때 $4\le\log_3 n<5$, $3<\log_4 n<4$이므로

$\log_3 n$과 $\log_4 n$의 정수부분은 각각 4, 3이다.

따라서 구하는 두 자리의 자연수 n의 최댓값은 80이다.

24. ‘가’형과 동일

25. ‘가’형과 동일

26. [출제의도] 행렬과 연립방정식의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 연립방정식이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 A의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a(a+2)-3=a^2+2a-3=0$

$\therefore\ a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 -2이다.

27. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$3^a=12^b=6$이므로 $3=6^{\frac{1}{a}}$, $12=6^{\frac{1}{b}}$이다.

이때, $6^{\frac{1}{a}}\times 6^{\frac{1}{b}}=6^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=3\times 12=36$이므로

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$이다.

28. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $p=q$일 때 주어진 식의 양변을 p로 나누면

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{p}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{p}$인 등차수열이다. (참)

ㄴ. $a_{n+1}=\dfrac{q}{p}a_n+\dfrac{1}{p}$이므로

$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{q}{p}(a_n-\alpha)$ $\left(\text{단, } \alpha=\dfrac{1}{p-q}\right)$

따라서 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\dfrac{1}{p-q}$이고,

공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 $a_n=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}(a_1-\alpha)+\alpha$이므로

$-1<\dfrac{q}{p}<1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29. [출제의도] 합성함수를 이용하여 방정식의 해의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

방정식 $f(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore\ A_1=\{0,\ 1\}$ ⋯ ㉠

㉠에서 $f(f(x))=1 \Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$

따라서 방정식 $f^2(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore\ A_2=\left\{0,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right\}$ ⋯ ㉡

㉡에서 $f(f(f(x)))=1$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $f(x)=1$

따라서 방정식 $f^3(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 세 직선 $y=0$, $y=\dfrac{1}{2}$, $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore\ A_3=\left\{0,\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4},\ 1\right\}$

이와 같은 방법으로

$a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n-1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

이 성립함을 알 수 있다.

이때, $(a_{n+1}-1)=2(a_n-1)$이므로

$a_n-1=(a_1-1)\times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n=2^{n-1}+1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n-1}+1}{2^n+1}=\dfrac{1}{2}$

30. [출제의도] 실생활의 상황을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

남아 있는 에너지는 $1000-2x-3y$이고,

현재의 점수는 $100+10x+20y$이므로

$a=-2$, $b=-3$, $c=10$, $d=20$

$\therefore\ a+b+c+d=-2-3+10+20=25$