2009학년도 9월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	③	*2*	②	*3*	③	*4*	①	*5*	④
6	③	*7*	⑤	*8*	④	*9*	⑤	*10*	④
11	①	*12*	②	*13*	④	*14*	③	*15*	②
16	③	*17*	①	*18*	⑤	*19*	②	*20*	①
21	⑤	*22*	12	*23*	11	*24*	14	*25*	17
26	511	*27*	115	*28*	198	*29*	40	*30*	18

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[4]{4^3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=2^3=8$

2. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2\log_3 2+\log_3 18-\log_3 8=\log_3\frac{4\times 18}{8}=\log_3 9=2$

3. [출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$이므로

$(A+B)C=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3\\-3&3\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 -3이다.

4. [출제의도] 등차수열의 일반항과 합의 관계를 알고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 등차수열의 일반항을 a_n, 공차를 d라 하면

$a_4=86,\ d=-4$이므로

$a_4=a_1+3d=86$에서 $a_1=98$

$\therefore\ a_n=98+(n-1)(-4)=-4n+102$

이때, $a_n=-4n+102>0$에서 $n<25.5$

주어진 수열은 첫째항부터 제25항까지 양수이고, 제26항부터 음수이다.

따라서 제25항까지의 합이 최대가 된다.

5. [출제의도] $\sum$에 대한 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^2-(k-1)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{10}4k=4\times\frac{10\times 11}{2}=220$

6. [출제의도] 지수가 실수일 때 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (좌변)$=(a^b)^c=a^{bc}$, (우변)$=a^{bc}$ (참)

ㄴ. (좌변)$=a\wedge b^c=a^{b^c}$,

(우변)$=a^b\wedge c=(a^b)^c=a^{bc}$ (거짓)

ㄷ. (좌변)$=(ab)^c=a^cb^c$, (우변)$=a^cb^c$ (참)

7. [출제의도] 지수법칙과 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3x=\log_2(5+2\sqrt{6})$에서 $2^{3x}=8^x=5+2\sqrt{6}$

$\therefore\ 8^x-8^{-x}=5+2\sqrt{6}-\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$

$=5+2\sqrt{6}-(5-2\sqrt{6})=4\sqrt{6}$

8. [출제의도] 행렬의 연산과 역행렬에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$이라 하면

$\left\{\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}◎\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}^{-1}\right\}◎\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}=(A◎A^{-1})◎B$

$=2E◎B=4B=\begin{pmatrix}16&12\\4&4\end{pmatrix}$

9. [출제의도] 행렬의 곱셈에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$이므로

$AB+BA=(A^2+B^2)-(A-B)^2$

$=\begin{pmatrix}0&2\\-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\-2&1\end{pmatrix}^2$

$=\begin{pmatrix}0&2\\-1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&2\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\1&2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $AB+BA$ 의 모든 성분의 합은 7이다.

10. [출제의도] 역행렬을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$b=a+1,\ c=a+7,\ d=a+8$이므로

$A=\begin{pmatrix}a&a+1\\a+7&a+8\end{pmatrix}$이고

$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}a+8&-(a+1)\\-(a+7)&a\end{pmatrix}$

$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+8&-a-1\\-a-7&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-6\\-a+7\end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha=a-6,\ \beta=-a+7$

$\alpha-\beta=2a-13=1$이므로 $a=7$

한편, 4월 14일은 3월 14일로부터 31일 후이고, 31을 7로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 4월 14일은 목요일이다.

11. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_9+\log_2 a_{10}=110$ ⋯ ㉠

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_9=90$ ⋯ ㉡

㉠－㉡에서 $\log_2 a_{10}=20$ $\therefore\ a_{10}=2^{20}$

12. [출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원의 중심은 직선 $y=a_nx$ 위의 점이므로 $(\alpha,\ a_n\alpha)$로 놓을 수 있다.

점 $(\alpha,\ a_n\alpha)$와 두 직선 $y=nx,\ y=2nx$ 사이의 거리가 서로 같으므로

$\frac{|n\alpha-a_n\alpha|}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{|2n\alpha-a_n\alpha|}{\sqrt{4n^2+1}}$ 이다.

$\alpha>0,\ n<a_n<2n$이므로

$\frac{-n+a_n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n-a_n}{\sqrt{4n^2+1}}$ 에서

$\frac{a_n}{n}=\frac{2\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{4}{3}$

13. [출제의도] 수학적귀납법을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다

(가) 9

(나) $2m^2+8m+7$

(다) $m^3+(m+1)^3$

14. [출제의도] 등비수열의 특징을 이해하고 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=2^n$이므로

$a_k\,a_{k+1}\cdots a_{k+m}=2^k2^{k+1}\cdots 2^{k+m}=2^{(m+1)k+\frac{m(m+1)}{2}}$

$a_{k+m+1}\,a_{k+m+2}\cdots a_{k+2m}$

$=2^{k+m+1}\,2^{k+m+2}\cdots 2^{k+2m}=2^{mk+\frac{m(3m+1)}{2}}$

$(m+1)k+\frac{m(m+1)}{2}=mk+\frac{m(3m+1)}{2}$ 에서

$k=m^2$

따라서 $a_{k+m}=2^{m^2+m}$이므로 $b_m=2^{m^2+m}$

ㄱ. $b_1=2^2=4$ (참)

ㄴ. 수열 $b_1,\ b_2,\ b_3,\cdots$ 은 등비수열이 아니다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{m=1}^{10}\log_2 b_m=\sum_{m=1}^{10}(m^2+m)=440$ (참)

15. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2=2\log_2 f_1$ ⋯ ㉠

$6=2\log_2 f_2$ ⋯ ㉡

㉡－㉠에서 $2=\log_2\frac{f_2}{f_1}$ $\therefore\ \frac{f_2}{f_1}=2^2=4$

16. [출제의도] 거듭제곱근의 대소 관계를 판단할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$k=\log_2 64=6$이므로 $x=\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{216}$

$l=\sqrt{36}=6$이므로 $y=\sqrt[6]{13}=\sqrt[12]{169}$

$m=\log_2 8=3,\ n=\log_3 81=4$이므로

$z=\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{256}$

$\therefore\ y<x<z$

17. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n행 n열에 들어가는 수를 b_n이라 하면

$b_1+7c=12,\ b_1+5c=8$에서 $b_1=-2,\ c=2$

$b_2=b_1+3c$

$b_3=b_2+5c=b_1+(3+5)c$

$b_4=b_3+7c=b_1+(3+5+7)c$

$\vdots$

$b_{10}=b_1+(3+5+7\cdots+19)c$

$=-2+\frac{9(3+19)}{2}\times 2=196$

18. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a^2-2a-3)n^2+(a+1)n+5}{n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-3)(a+1)n^2+(a+1)n+5}{n+2}=b$이려면

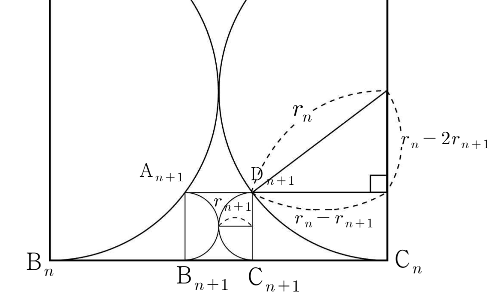
$(a-3)(a+1)=0,\ a+1=b\,(b\neq 0)$이어야 한다.

$\therefore\ a=3,\ b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$이다.

19. [출제의도] 무한등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서



$r_n^2=(r_n-r_{n+1})^2+(r_n-2r_{n+1})^2$이므로

$5r_{n+1}^2-6r_nr_{n+1}+r_n^2=0$

$(5r_{n+1}-r_n)(r_{n+1}-r_n)=0$

$\therefore\ r_{n+1}=\dfrac{1}{5}r_n$

$\therefore\ S_{n+1}=2\times\dfrac{1}{2}\times\pi r_{n+1}^2=\dfrac{1}{25}\times\pi r_n^2=\dfrac{1}{25}S_n$

수열 $\{S_n\}$은 $S_1=2\times\dfrac{1}{2}\times\pi\times1^2=\pi$이고,

공비가 $\dfrac{1}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{25}}=\frac{25}{24}\pi$$

20. [출제의도] 수열의 극한과 무한급수에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n=1$, $b_n=n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{n}$

이 모두 존재하지만 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\infty$이다. (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n$이면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n a_n$은 수렴하지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$은 존재하지 않는다. (거짓)

21. [출제의도] 등차수열의 합에 대한 추론능력을 묻는 문제이다.

선분들의 길이는

$\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ \cdots,\ \dfrac{k}{2}\sqrt{2},\ \dfrac{k}{2}\sqrt{2}$ (k는 짝수)

이므로 모든 선분의 길이의 합은

$$2\sqrt{2}\left(1+2+\cdots+\frac{k}{2}\right)=2\sqrt{2}\times\frac{\frac{k}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)}{2}=380\sqrt{2}$$

$k(k+2)=1520$ $\quad\therefore\ k=38$

38은 4의 배수가 아닌 짝수이므로 A_{38}은 y축의 양의 부분에 놓여 있으며 $\mathrm{A}_{4n-2}(0,\ 2n)$($n$은 자연수) 꼴이다.

따라서 점 A_{38}의 좌표는 $(0,\ 20)$ $\quad\therefore\ m=20$

22. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}2&5\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-E$

$\therefore\ A^4=E$

$\therefore\ A+A^5+A^9=A+A+A=3A=\begin{pmatrix}6&15\\-3&-6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+A^5+A^9$의 모든 성분의 합은 12이다.

23. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x=4+\alpha\ (0\le\alpha<1)$ 라 하면

$\log\sqrt[3]{x}=\dfrac{1}{3}\log x=\dfrac{4}{3}+\dfrac{\alpha}{3}=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{\alpha}{3}$

$0\le\dfrac{\alpha}{3}<\dfrac{1}{3}$ 이므로 $\log\sqrt[3]{x}$ 의 가수는 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{\alpha}{3}$이다.

$\log x$ 와 $\log\sqrt[3]{x}$ 의 가수가 같으므로

$\alpha=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\alpha}{3}$ 에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \log x=4+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$

따라서 $p=2$, $q=9$이므로 $p+q=11$

24. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

n이 짝수이면 $f(n)=2$, n이 홀수이면 $f(n)=1$

$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$

$=2+1+2+1+2+1+2+1+2=14$

25. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 역행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^4=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$, $A^8=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}$

$(A^{-1})^8=(A^8)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&16\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{16}\begin{pmatrix}16&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로

행렬 $16(A^{-1})^8$의 모든 성분의 합은 17이다.

26. [출제의도] 등비수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=4$, $a_4=ar^3=16$이므로 $r^2=4$

$\therefore\ r=2,\ a=2$

$\therefore\ a_n=2^n$

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}$$

$\therefore\ p=256,\ q=255$

$\therefore\ p+q=511$

27. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}t&4t-1\\1&t+2p\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하므로

$t(t+2p)-(4t-1)\ne0$, $t^2+2(p-2)t+1\ne0$

실수 t의 값에 관계없이 성립하여야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(p-2)^2-1<0$, $1<p<3$

$\therefore\ p=2$

$a_{n+1}=a_n+2n+3$이므로

$a_{10}=-2+\sum\limits_{k=1}^{9}(2k+3)=115$

28. [출제의도] 순서도를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

n	m	S
1	1	1
2	$1+2$	$1+\frac{1}{1+2}$
3	$1+2+3$	$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}$
⋮	⋮	⋮
99	$1+2+\cdots+99$	$1+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+99}$

$S=1+\dfrac{1}{1+2}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+99}$

$=\sum\limits_{n=1}^{99}\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\sum\limits_{n=1}^{99}\dfrac{2}{n(n+1)}$

$=2\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{100}\right)=\dfrac{99}{50}$

$\therefore\ 100S=198$

29. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수 사이의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x$의 지표를 n, 가수를 $\alpha\ (0\le\alpha<1)$라 하면

$[\log x]=n$, $\log x-[\log x]=\alpha$

$[\log x]=3(\log x-[\log x])$에서 $n=3\alpha$

$0\le3\alpha<3$이고 3α는 정수이므로

$3\alpha=0$ 또는 $3\alpha=1$ 또는 $3\alpha=2$이다.

$\therefore\ \alpha=0$ 또는 $\alpha=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\alpha=\dfrac{2}{3}$

(ⅰ) $\alpha=0$일 때, $\log x=0$이므로 $x=1$

(ⅱ) $\alpha=\dfrac{1}{3}$일 때, $\log x=\dfrac{4}{3}$이므로 $x=10^{\frac{4}{3}}$

(ⅲ) $\alpha=\dfrac{2}{3}$일 때, $\log x=\dfrac{8}{3}$이므로 $x=10^{\frac{8}{3}}$

따라서 주어진 등식을 만족시키는 모든 양수 x의 값의 곱 A는 $A=10^4$이다.

$\therefore\ 10\log A=40$

30. [출제의도] 무한등비급수의 수렴조건과 수열의 극한에 대한 성질을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r-5}{8}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\dfrac{r-5}{8}<1$이므로 $-3<r<13$

(ⅰ) $-3<r<7$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-7^n+2}{r^n+7^{n+1}+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r\left(\frac{r}{7}\right)^n-1+\frac{2}{7^n}}{\left(\frac{r}{7}\right)^n+7+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n}=-\frac{1}{7}$$

(ⅱ) $r=7$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}-7^n+2}{7^n+7^{n+1}+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times7^n+2}{8\times7^n+2^{n-1}}=\frac{3}{4}$$

(ⅲ) $7<r<13$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r-\left(\frac{7}{r}\right)^n+\frac{2}{r^n}}{1+7\left(\frac{7}{r}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^n}=r$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-3<r<7$

따라서 모든 정수 r의 값의 합은 18이다.

수리 '나'형 정답

1	③	*2*	②	*3*	③	*4*	④	*5*	⑤
6	③	*7*	⑤	*8*	④	*9*	⑤	*10*	④
11	②	*12*	①	*13*	①	*14*	④	*15*	②
16	③	*17*	①	*18*	①	*19*	②	*20*	⑤
21	⑤	*22*	12	*23*	11	*24*	14	*25*	17
26	13	*27*	23	*28*	10	*29*	40	*30*	19

해 설

1. "가"형과 동일

2. "가"형과 동일

3. "가"형과 동일

4. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^{3a+2b-c}=\dfrac{3^{3a}3^{2b}}{3^c}=\dfrac{(3^a)^3(3^b)^2}{3^c}=\dfrac{8\times25}{50}=4$

5. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

a^2은 b의 세제곱근이므로 $(a^2)^3=b$

$\therefore\ a^6=b$

c^3은 b의 네제곱근이므로 $(c^3)^4=b$

$\therefore\ c^{12}=b$

$\log_a b+\log_b c=\log_a a^6+\log_{c^{12}}c=6+\dfrac{1}{12}=\dfrac{73}{12}$

$\therefore\ p=12,\ q=73$ $\quad\therefore\ p+q=85$

6. "가"형과 동일

7. "가"형과 동일

8. "가"형과 동일

9. "가"형과 동일

10. "가"형과 동일

11. **[출제의도] 거듭제곱근의 성질을 알고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\left(36^{\frac{1}{n}}\right)^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$에서 $6^{\frac{4}{n}}=6$

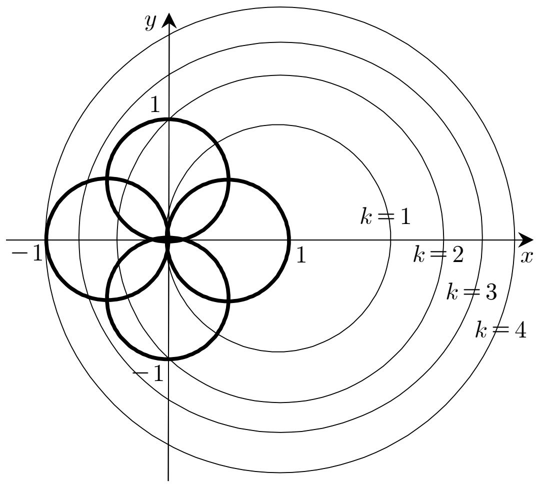
$\therefore\ \frac{4}{n}=1$

$\therefore\ n=4$

12. **[출제의도] 역행렬을 이용하여 연립방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$(x-1)^2+y^2=k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$인 원에서

k의 값이 1, 2, 3, 4일 때의 반지름의 길이는 각각 $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2$이다. 이들 원과 주어진 4개의 원과의 교점을 세어보면



$a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=2,\ a_4=1$

$\therefore\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$

$=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\therefore\ p+q=7$

13. **[출제의도] 로그의 성질을 이용한 증명 과정에서의 추론능력을 묻는 문제이다.**

(가) 2^q

(나) $\log_2 5$

(다) 무리수

14. **[출제의도] 행렬의 곱셈에 대한 성질과 역행렬의 성질을 알고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $A^2+AB=B^{-1}$에서 $A^2B+AB^2=E$ … ㉠

$B^2+BA=A^{-1}$에서 $AB^2+ABA=E$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $A^2B=ABA$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. ㉡에서 $AB(A+B)=E$

$\therefore (AB)^{-1}=A+B$ (거짓)

ㄷ. $(A+B)^{-1}=AB$이므로

$(A+B)^{-1}(A^{-1}+B^{-1})$

$=AB(A^{-1}+B^{-1})$

$=ABA^{-1}+ABB^{-1}=B+A$(참)

15. “가”형과 동일

16. “가”형과 동일

17. **[출제의도] 상용로그의 지표의 성질을 알고 있는가를 묻는 문제이다.**

$f(x)f(y)=2f(x)-2f(y)+9$를 변형하면

$\{f(x)+2\}\{f(y)-2\}=5$이다.

$f(x),\ f(y)$는 0이상인 정수이므로

$f(x)+2=5,\ f(y)-2=1$

즉, $f(x)=3,\ f(y)=3$

$\log x,\ \log y$의 지표가 3이므로

$10^3\le x<10^4,\ 10^3\le y<10^4$을 만족시키는 자연수 $x,\ y$의 개수는 각각 9×10^3이다.

따라서 순서쌍 (x,y)의 개수는 81×10^6이다.

18. **[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$2^a=3^b=6^c=12^d=k$로 놓으면

$k^{\frac{1}{a}}=2$ … ㉠

$k^{\frac{1}{b}}=3$ … ㉡

$k^{\frac{1}{c}}=6$ … ㉢

$k^{\frac{1}{d}}=12$ … ㉣

㉡, ㉢에서 $k^{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=2$이므로 $k^{\frac{1}{4}}=2\quad\therefore\ k=16$

㉠에 $k=16$을 대입하면 $a=4$

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{d}-\frac{1}{c}}=2$이므로 $\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{1}{4}$

점 $(4,0)$과 직선 $y=x+2$ 사이의 거리는

$\frac{|4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

19. **[출제의도] 역행렬의 성질을 이용한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$이므로

$\overline{AB}=a=2,\ \overline{AD}=b=\sqrt{3}$이다.

한편, $\overline{AB}^2=\overline{AD}\times\overline{AC}$에서 $\overline{AC}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이다.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \overline{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

20. **[출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

집합 G의 원소를 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$-X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ -E=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$로 놓으면 곱셈에 대한 결과는 아래 표와 같다.

곱	E	X	$-X$	$-E$
E	E	X	$-X$	$-E$
X	X	E	$-E$	$-X$
$-X$	$-X$	$-E$	E	X
$-E$	$-E$	$-X$	X	E

ㄱ. 위의 표로부터 집합 G는 곱셈에 대하여 닫혀 있다. (참)

ㄴ. 위의 표로부터 $E^2=X^2=(-X)^2=(-E)^2=E$이므로 집합 G의 모든 원소는 곱셈에 대한 역원을 가진다. (참)

ㄷ. 집합 G의 임의의 원소 $A,\ B$에 대하여

$A^2=E,\ B^2=E,\ (AB)^2=E$이므로

$(AB)^{2n}=E=A^{2n}B^{2n}$이 성립한다. (참)

21. **[출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$10^2<N<10^4$에서 $2<\log N<4$이므로

$n=2$ 또는 $n=3$

연립방정식 $\begin{pmatrix} -\alpha & n \\ n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 정리하면

$\begin{pmatrix} n-\alpha & n \\ n & n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

주어진 연립방정식이 $x=y=0$이외의 해를 가지려면

$(n-\alpha)(n+1)-n^2=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{n}{n+1}$

(ⅰ) $n=2$일 때, $\alpha=\frac{2}{3}$

(ⅱ) $n=3$일 때, $\alpha=\frac{3}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $N=10^{\frac{8}{3}}$ 또는 $N=10^{\frac{15}{4}}$이므로

구하는 모든 N의 값의 곱은

$10^{\frac{8}{3}}\times10^{\frac{15}{4}}=10^{\frac{8}{3}+\frac{15}{4}}=10^{\frac{77}{12}}$

따라서 $p=12,\ q=77$이므로 $p+q=89$이다.

22. “가”형과 동일

23. “가”형과 동일

24. “가”형과 동일

25. “가”형과 동일

26. **[출제의도] 지수법칙을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$4^x=5,\ 5^y=6,\ 6^z=8$에서

$4^{xyz}=8$이므로 $2^{2xyz}=2^3$

$\therefore\ xyz=\frac{3}{2}$

따라서 $p=2,\ q=3$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

27. **[출제의도] 상용로그의 지표의 성질을 묻는 문제이다.**

$A=(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$에서

$4A=(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=5^{32}-1$

$\log5^{32}=32\log5=32(1-\log2)=22.368$이므로

5^{32}은 23자리 자연수이다.

그런데 5^{32}의 일의 자리의 수가 5이므로 5^{32}의 자릿수와 $5^{32}-1$의 자릿수는 같다.

따라서 $5^{32}-1$은 23자리 자연수이다.

28. **[출제의도] 역행렬을 이용하여 수학 내적 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

직선 AD는 $\angle$BAC의 이등분선이므로

$a:b=c:d\qquad\therefore\ ad-bc=0$

$\begin{pmatrix} 1 & bc-9 \\ 1 & ad \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} ad & -bc+9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} ad & -bc+9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ad \\ bc+9 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} (ad)^2-(bc)^2+81 \\ -ad+bc+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ \alpha=9,\ \beta=1\qquad\therefore\ \alpha+\beta=10$

29. “가”형과 동일

30. **[출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 이용한 활용 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

행렬 $\begin{pmatrix} x-1 & -y+4 \\ y-4 & x-3 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(x-1)(x-3)-(-y+4)(y-4)=0$

$x^2-4x+3+(y-4)^2=0$

$(x-2)^2+(y-4)^2=1$

원점에서 $(2,\ 4)$까지의 거리는 $2\sqrt{5}$이므로

$M=2\sqrt{5}+1,\ m=2\sqrt{5}-1$

$\therefore\ Mm=(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)=19$