

5. 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여, a^2 은 b 의 세제곱근이고 c^3 은 b 의 네제곱근이다. $\log_a b + \log_b c = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값은?
(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]
- ① 81 ② 82 ③ 83 ④ 84 ⑤ 85

6. 두 양수 x, y 에 대하여 연산 \wedge 를 $x \wedge y = x^y$ 으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c 는 양수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(a \wedge b)^c = a \wedge (bc)$
 ㄴ. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
 ㄷ. $(ab) \wedge c = (a \wedge c)(b \wedge c)$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. $x = \frac{1}{3} \log_2(5+2\sqrt{6})$ 일 때, $8^x - 8^{-x}$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ② $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$
 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

8. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 연산 \odot 를 $A \odot B = AB + BA$ 로 정의할 때, 행렬 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \right\} \odot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 은? [3점]

- ① $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

9. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

을 만족시킬 때, 행렬 $AB + BA$ 의 모든 성분의 합은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 그림은 어느 해 3월 달력의 일부분을 나타낸 것이다. 그림에 붉은 실선으로 표시된 직사각형 안에 있는 수 a, b, c, d 를 성분으로 하는 이차정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대하여 연립방정식 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 하자.

$\alpha - \beta = 1$ 일 때, 그 해의 4월 14일의 요일은? [4점]

3월						
일	월	화	수	목	금	토
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	a	b	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	c	d	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

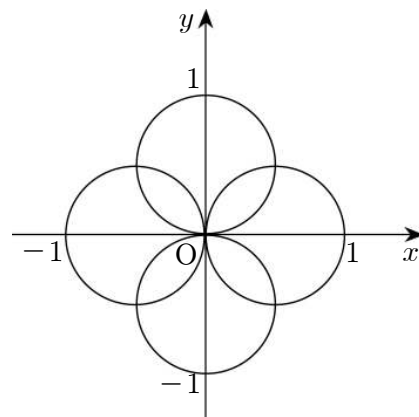
- ① 월요일 ② 화요일 ③ 수요일 ④ 목요일 ⑤ 금요일

11. $36^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

12. 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 4개의 원이 그림과 같이 놓여 있다.

주어진 4개의 원과 원 $(x-1)^2 + y^2 = k$ ($k=1, 2, 3, 4$)의 서로 다른 교점의 개수를 a_k 라 하자. 이 때, $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \end{pmatrix}$ 을 만족시키는 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값은? [4점]



- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

13. 다음은 유리수 x, y, u, v 에 대하여

$x \log 2 + y \log 5 = u \log 2 + v \log 5$ 이면 $x = u, y = v$ 임을 증명한 것이다.

<증명>

먼저 $\frac{\log 5}{\log 2}$ 가 무리수임을 보이자.

$\frac{\log 5}{\log 2} = \frac{q}{p}$ (p, q 는 서로소인 자연수)라 하면

$5^p = \text{(가)}$ 이다.

그런데, 5^p 은 홀수이고 (가) 은 짝수이므로 모순이다.

따라서 $\frac{\log 5}{\log 2}$ 는 무리수이다.

$x \log 2 + y \log 5 = u \log 2 + v \log 5$ 에서

$x - u = (v - y) \text{(나)}$ 이다.

$v - y \neq 0$ 이면 우변은 (다) 이고, 좌변은 □ 이므로 등식이 성립하지 않는다.

그러므로 $v - y = 0, x - u = 0$ 이다.

따라서 $x = u, y = v$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	2^q	$\log_2 5$	무리수
②	2^q	$\log_2 5$	유리수
③	2^q	$\log_5 2$	무리수
④	2^p	$\log_2 5$	유리수
⑤	2^p	$\log_5 2$	유리수

14. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B 가

$A^2 + AB = B^{-1}, B^2 + BA = A^{-1}$ 를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, A^{-1} 는 A 의 역행렬이다.)

[4점]

<보기>

ㄱ. $AB = BA$

ㄴ. $(AB)^{-1} = A - B$

ㄷ. $(A+B)^{-1}(A^{-1}+B^{-1}) = A+B$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 어떤 카메라에는 렌즈를 통하여 필름에 도달하는 빛의 양을 조절하는 장치인 조리개가 있다. 이 카메라에서 필름에 도달하는 빛의 양의 척도 s 와 조리개 개방 수치 f 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$s = 2 \log_2 f$$

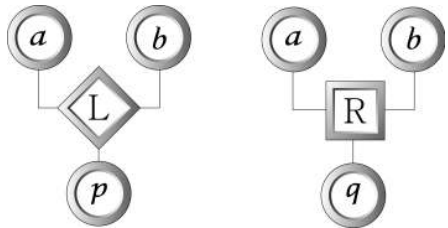
필름에 도달하는 빛의 양의 척도가 2일 때의 조리개 개방 수치를 f_1 , 필름에 도달하는 빛의 양의 척도가 6일 때의 조리개

개방 수치를 f_2 라 할 때, $\frac{f_2}{f_1}$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

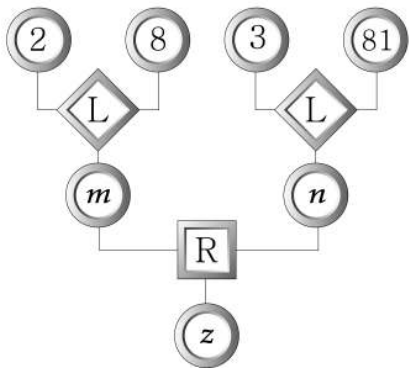
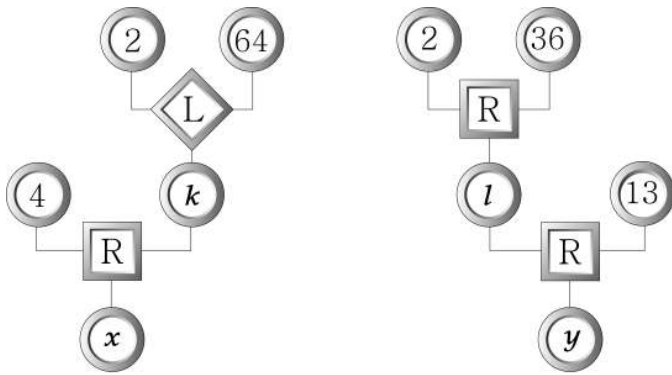
16. <그림1>과 같은 두 종류의 연산 장치 \diamond , \square 가 있다.

2 이상의 두 자연수 a, b 에 대하여 연산 장치 \diamond 에 두 수 a, b 가 입력될 때 출력되는 수 p 는 $p = \log_a b$ 이고, 연산 장치 \square 에 두 수 a, b 가 입력될 때 출력되는 수 q 는 $q = \sqrt{b}$ 이다.



<그림1>

위의 두 종류의 연산 장치를 결합하여 만든 <그림2>의 각 연산 장치에서 출력되는 세 수 x, y, z 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]



<그림2>

- ① $x < y < z$
- ② $x < z < y$
- ③ $y < x < z$
- ④ $y < z < x$
- ⑤ $z < x < y$

17. 자연수 x 의 상용로그의 지표를 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)f(y) = 2f(x) - 2f(y) + 9$ 를 만족시키는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는? [4점]

- ① 81×10^6
- ② 81×10^8
- ③ 81×10^{10}
- ④ 81×10^{12}
- ⑤ 81×10^{14}

18. $abcd \neq 0$ 인 네 실수 a, b, c, d 에 대하여

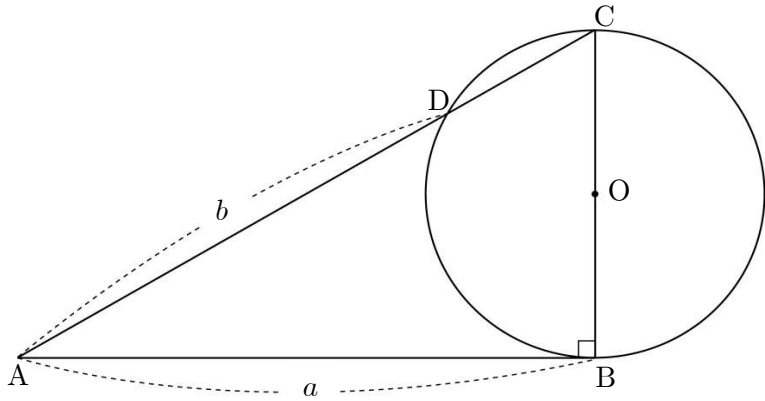
$$2^a = 3^b = 6^c = 12^d, \quad \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$

일 때, 좌표평면 위의 점 $(a, 0)$ 과 직선 $y = x + 8\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right)$ 사이의 거리는? [3점]

- ① $3\sqrt{2}$
- ② $4\sqrt{2}$
- ③ $5\sqrt{2}$
- ④ $6\sqrt{2}$
- ⑤ $7\sqrt{2}$

19. 그림과 같이 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 변 BC를 지름으로 하는 원 O와 변 AC의 교점 중 C가 아닌 점을 D라 할 때, $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$ 라 하자.

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 가 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 을 만족시킬 때, \overline{BC} 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

20. 네 개의 행렬로 이루어진 집합 G가

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보 기>
- ㄱ. 집합 G는 곱셈에 대하여 닫혀 있다.
 ㄴ. 집합 G의 모든 원소는 곱셈에 대한 역원을 가진다.
 ㄷ. 집합 G의 임의의 원소 A, B에 대하여 $(AB)^{2n} = A^{2n}B^{2n}$ 이다. (단, n은 자연수이다.)

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. $10^2 < N < 10^4$ 인 실수 N에 대하여 $\log N$ 의 지표와 가수를 각각 n, α라 하자. 연립방정식 $\begin{pmatrix} -\alpha & n \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 가 $x=y=0$ 이외의 해를 가지도록 하는 모든 N의 값의 곱은 $10^{\frac{q}{p}}$ 이다. 이때, p+q의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

- ① 85 ② 86 ③ 87 ④ 88 ⑤ 89

단답형(22~30)

22. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A + A^5 + A^9$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23. $\log x$ 의 지표가 4이고 $\log x$ 와 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 가수가 같을 때, $\log x = \frac{q}{p}$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 3의 n 제곱근 중 실수의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(10)$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 2이상의 자연수이다.) [3점]

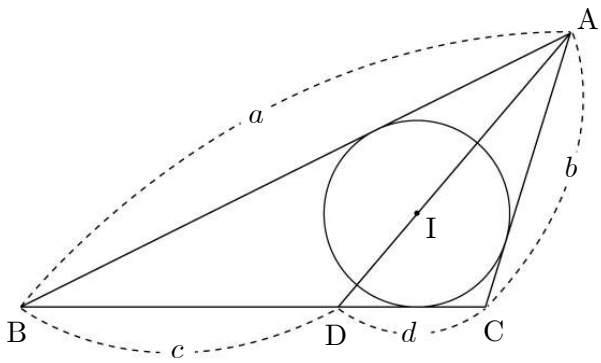
25. 이차정사각행렬 A 가 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 를 만족시킬 때,

행렬 $16(A^{-1})^8$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, A^{-1} 는 A 의 역행렬이다.) [3점]

26. $4^x = 5, 5^y = 6, 6^z = 8$ 일 때, $xyz = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

27. $A = (5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$ 일 때, $4A$ 는 n 자리 자연수이다. n 의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.) [4점]

28. 그림과 같이 삼각형 ABC 의 내접원의 중심 I 와 꼭짓점 A 를 지나는 직선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 하자. $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BD} = c$, $\overline{CD} = d$ 라 할 때, 연립방정식 $\begin{pmatrix} 1 & bc-9 \\ 1 & ad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad \\ bc+9 \end{pmatrix}$ 의 해 $x = \alpha$, $y = \beta$ 에 대하여 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 등식 $[\log x] = 3(\log x - [\log x])$ 를 만족시키는 모든 양수 x 의 값의 곱을 A 라 할 때, $10 \log A$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

30. 행렬 $\begin{pmatrix} x-1 & -y+4 \\ y-4 & x-3 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않도록 하는 모든 실수 x, y 에 대하여 점 $P(x, y)$ 를 좌표평면 위에 나타낼 때, 점 P 가 나타내는 도형과 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 원이 만난다고 한다. r 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 두 수 Mm 의 곱을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.