2009학년도 9월 고2 전국연합학력평가 문제지

제 2 교시 수리 영역

'가'형 | 성명 | | 수험 번호 | | | | | | 2 | | | | | *1*

◦ 자신이 선택한 유형('가'형/'나'형)의 문제지인지 확인하시오.
◦ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
◦ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
◦ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면, 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
◦ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
◦ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\sqrt[4]{4^3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

2. $2\log_3 2+\log_3 18-\log_3 8$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 세 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $(A+B)C$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

4. 제 4 항이 86이고 공차가 -4인 등차수열에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n이 최대가 되는 자연수 n의 값은? [3점]

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

5. $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$의 값은? [3점]

① 190 ② 200 ③ 210 ④ 220 ⑤ 230

6. 두 양수 x, y에 대하여 연산 $\wedge$를 $x\wedge y=x^y$으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b, c는 양수이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(a\wedge b)^c=a\wedge(bc)$

ㄴ. $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$

ㄷ. $(ab)\wedge c=(a\wedge c)(b\wedge c)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. $x=\frac{1}{3}\log_2(5+2\sqrt{6})$일 때, 8^x-8^{-x}의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ ② $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

8. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 연산 ◎를 $A◎B=AB+BA$로 정의할 때, 행렬 $\left\{\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}◎\begin{pmatrix}3&2\\-1&4\end{pmatrix}^{-1}\right\}◎\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$은? [3점]

① $\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix}8&6\\2&2\end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix}12&9\\3&3\end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix}16&12\\4&4\end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix}20&15\\5&5\end{pmatrix}$

9. 두 이차정사각행렬 A, B가

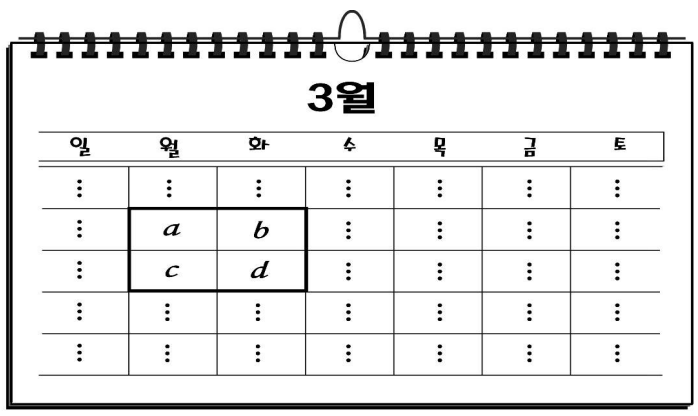
$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ A^2+B^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

을 만족시킬 때, 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

10. 그림은 어느 해 3월 달력의 일부분을 나타낸 것이다. 그림에 굵은 실선으로 표시된 직사각형 안에 있는 수 a, b, c, d를 성분으로 하는 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$ 라 하자.

$\alpha-\beta=1$일 때, 그 해의 4월 14일의 요일은? [4점]



3월

일	월	화	수	목	금	토
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	a	b	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	c	d	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

① 월요일 ② 화요일 ③ 수요일 ④ 목요일 ⑤ 금요일

11. 수열 $\{a_n\}$이

$$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n=n^2+n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 2^{20} ② 2^{21} ③ 2^{22} ④ 2^{23} ⑤ 2^{24}

12. 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=nx$, $y=2nx$에 동시에 접하는 어떤 원의 중심과 원점을 지나는 직선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? (단, 원의 중심은 제1사분면 위에 있다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

13. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n+1}(n^2+k)=n^3+(n+1)^3$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때,

(좌변)= [(가)], (우변)= [(가)]이므로

주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=m(m\geq 1)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하자.

$$\sum_{k=1}^{2(m+1)+1}\{(m+1)^2+k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{2m+1}\{(m+1)^2+k\}+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{2m+1}(m^2+k)+\sum_{k=1}^{2m+1}(2m+1)+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=\boxed{\text{(다)}}+(2m+1)^2+\boxed{\text{(나)}}$$

$$=(m+1)^3+(m+2)^3$$

그러므로 $n=m+1$일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	8	$2m^2+8m+6$	$(m-1)^3+(m+1)^3$
②	8	$2m^2+8m+7$	$(m-1)^3+(m+1)^3$
③	9	$2m^2+8m+7$	$(m-1)^3+(m+1)^3$
④	9	$2m^2+8m+7$	$m^3+(m+1)^3$
⑤	9	$2m^2+8m+6$	$m^3+(m+1)^3$

14. 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에서 임의의 연속된 $2m+1$개의 항 a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, …, a_{k+2m}에 대하여

$$a_k a_{k+1}\cdots a_{k+m}=a_{k+m+1}a_{k+m+2}\cdots a_{k+2m}$$

일 때, a_{k+m}을 b_m이라 하자. 이 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k, m은 자연수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $b_1=4$

ㄴ. 수열 b_1, b_2, b_3,…은 등비수열이다.

ㄷ. $\sum_{m=1}^{10}\log_2 b_m=440$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 어떤 카메라에는 렌즈를 통하여 필름에 도달하는 빛의 양을 조절하는 장치인 조리개가 있다. 이 카메라에서 필름에 도달하는 빛의 양의 척도 s와 조리개 개방 수치 f 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

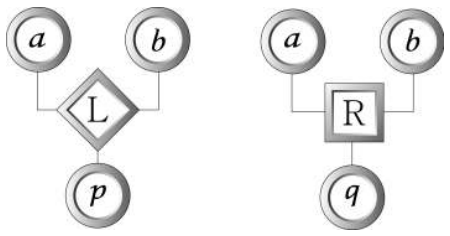
$$s=2\log_2 f$$

필름에 도달하는 빛의 양의 척도가 2일 때의 조리개 개방 수치를 f_1, 필름에 도달하는 빛의 양의 척도가 6일 때의 조리개 개방 수치를 f_2라 할 때, $\frac{f_2}{f_1}$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

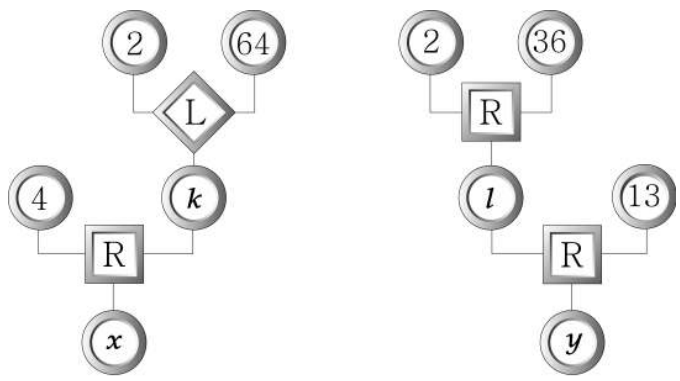
16. <그림1>과 같은 두 종류의 연산 장치 L, R가 있다.

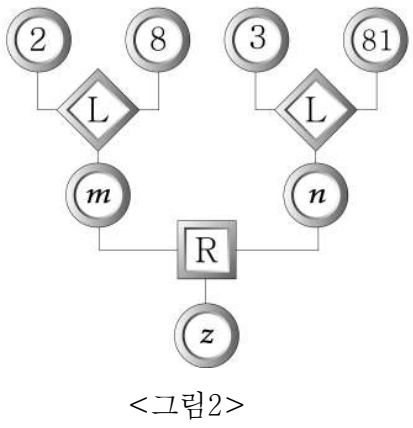
2 이상의 두 자연수 a, b에 대하여 연산 장치 L에 두 수 a, b가 입력될 때 출력되는 수 p는 $p=\log_a b$이고, 연산 장치 R에 두 수 a, b가 입력될 때 출력되는 수 q는 $q=\sqrt[a]{b}$ 이다.



<그림1>

위의 두 종류의 연산 장치를 결합하여 만든 <그림2>의 각 연산 장치에서 출력되는 세 수 x, y, z의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]



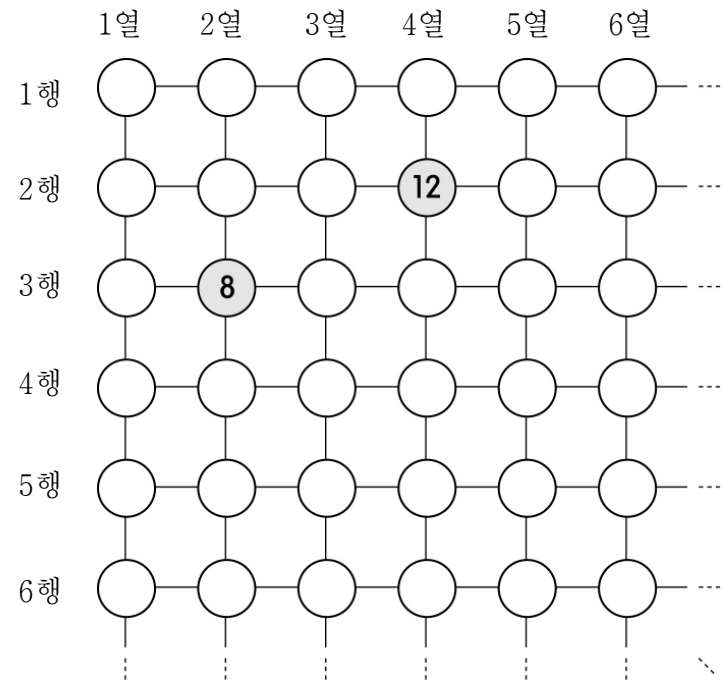


<그림2>

① $x<y<z$ ② $x<z<y$ ③ $y<x<z$
④ $y<z<x$ ⑤ $z<x<y$

17. 다음 규칙에 따라 그림의 i행 j열의 ○안에 수 a_{ij}를 써 넣으려고 한다. (단, $i=1, 2, 3, \cdots$, $j=1, 2, 3, \cdots$)

(가) 2행 4열, 3행 2열의 ○안에 각각 12, 8을 써 넣는다.
(나) 상수 c에 대하여 a_{i1}, a_{i2}, a_{i3},…은 공차가 $c\times i$인 등차수열이 되고, a_{1j}, a_{2j}, a_{3j},…은 공차가 $c\times j$인 등차수열이 되도록 써 넣는다.



이 때, 10행 10열의 ○안에 써 넣을 수는? [4점]

① 196 ② 197 ③ 198 ④ 199 ⑤ 200

18. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a^2-2a-3)n^2+(a+1)n+5}{n+2}=b\ (b\neq 0)$를 만족시키는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, n은 자연수이다.) [3점]

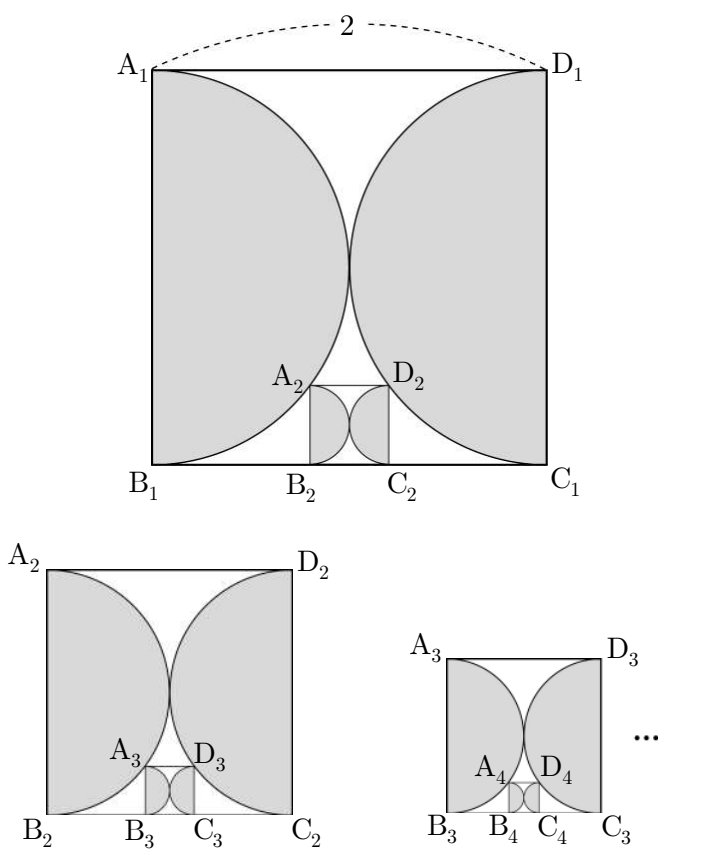
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 변 A_1B_1, C_1D_1을 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

이 두 반원과 변 B_1C_1으로 둘러싸인 부분에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부에 변 A_2B_2, C_2D_2를 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_2라 하자.

이 두 반원과 변 B_2C_2로 둘러싸인 부분에 내접하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 내부에 변 A_3B_3, C_3D_3를 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 이 두 반원의 넓이의 합을 S_3라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 반원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{16}{15}\pi$ ② $\frac{25}{24}\pi$ ③ $\frac{36}{35}\pi$ ④ $\frac{45}{44}\pi$ ⑤ $\frac{49}{48}\pi$

20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

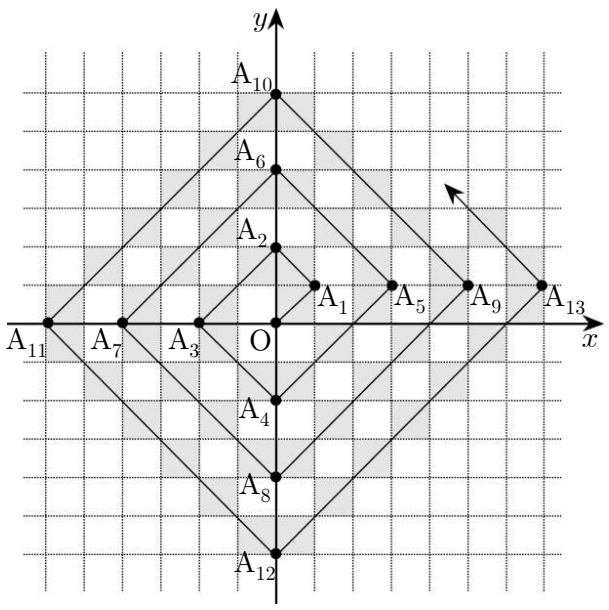
ㄱ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

ㄴ. 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$, $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$이 모두 수렴하면 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$은 수렴한다. (단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.)

ㄷ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 그림과 같이 원점 O에서 시작하여 $A_1(1, 1)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(-2, 0)$, $A_4(0, -2)$, $A_5(3, 1)$, …, $A_k(0, m)$의 순서대로 각 점을 연결하는 선분을 긋는다. 그어진 모든 선분의 길이의 합이 $380\sqrt{2}$일 때, m의 값은? [4점]



① -20 ② -18 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

단답형(22~30)

22. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+A^5+A^9$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

23. $\log x$의 지표가 4이고 $\log x$와 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 가수가 같을 때, $\log x=\frac{q}{p}$이다. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. 3의 n제곱근 중 실수의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$의 값을 구하시오. (단, n은 2 이상의 자연수이다.) [3점]

25. 이차정사각행렬 A가 $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 행렬 $16(A^{-1})^8$의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, A^{-1}는 A의 역행렬이다.) [3점]

26. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2=4$, $a_4=16$이다. $\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

수리 영역

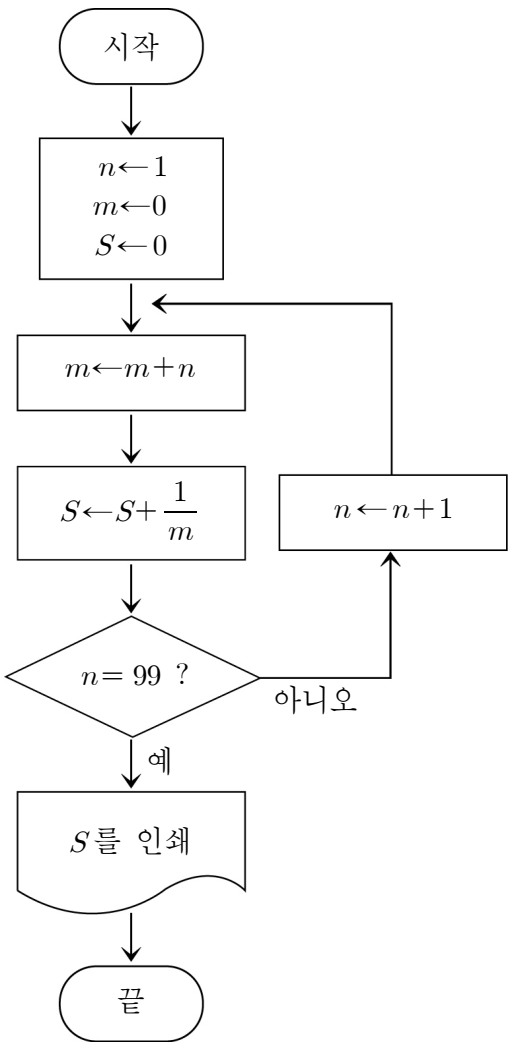
'가'형

27. 실수 t의 값에 관계없이 행렬 $\begin{pmatrix} t & 4t-1 \\ 1 & t+2p \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하도록 하는 자연수 p에 대하여, 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + pn + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

28. 다음 순서도에서 인쇄되는 값 S에 대하여 $100S$의 값을 구하시오. [4점]



29. 등식 $[\log x] = 3(\log x - [\log x])$를 만족시키는 모든 양수 x의 값의 곱을 A라 할 때, $10 \log A$의 값을 구하시오. ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

30. 다음 두 조건을 만족시키는 모든 정수 r의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-5}{8}\right)^n$이 수렴한다.

(나) $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1} - 7^n + 2}{r^n + 7^{n+1} + 2^{n-1}} = -\frac{1}{7}$

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.