

제 2 교시

수리 영역 (나 형)

1

1. $\sqrt[3]{2} \times 2^{-2} \times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2
 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 실수 p, q 가 $pA + qB = 5E$ 를 만족시킬 때, $p + q$ 의 값은? (단, E 는 단위행렬이다.) [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

3. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 A^5 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 27 ② 36 ③ 45
 ④ 54 ⑤ 63

4. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} t-4 & t \\ 2 & 2t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 가 해를 갖지 않도록 하는 실수 t 의 값을 α, β 라 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{9}{2}$ ② $-\frac{9}{4}$ ③ -2
 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

5. 이차정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 를

$$a_{ij} = (\text{다항식 } x^3 + 2x + 1 \text{을 } x - (i - j) \text{로 나눈 나머지})$$

라 정의할 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

6. 두 실수 a, b 에 대하여 거듭제곱근의 성질로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $ab \neq 0$) [3점]

< 보기 >

ㄱ. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

ㄴ. $\sqrt[4]{(ab)^2} + \sqrt[4]{(-ab)^2} = 0$

ㄷ. $\sqrt[5]{(ab)^2} = \sqrt[5]{a^2} \sqrt[5]{b^2}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 자연수 n 에 대하여

$$A_n = \{x \mid 2n - 1 \leq \log_2 x < 2n + 1, x \text{는 자연수}\}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보기 >

ㄱ. $A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

ㄴ. $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$

ㄷ. 집합 A_n 의 원소의 개수는 $3 \cdot 2^{2n-1}$ 개이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 삼차방정식 $x^3 - 10x + 9 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\sqrt[3]{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}$ 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 3

9. 다음은 이차정사각행렬 A 에 대하여 $A^2 - (1+p)A + pE = O$ 일 때, A^n ($n \geq 2$ 인 자연수)을 $\alpha A + \beta E$ 로 나타내는 과정이다. (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬, p, α, β 는 실수이다.)

$$\begin{aligned}
 A^2 - A &= p(A - E) \text{이므로} \\
 A^3 - A^2 &= p(A^2 - A) = p^2(A - E) \\
 A^4 - A^3 &= p^2(A^2 - A) = p^3(A - E) \\
 &\vdots \\
 A^n - A^{n-1} &= \boxed{\text{(가)}} (A - E) \text{이다.} \\
 \text{따라서 } A^n - A &= (p + p^2 + p^3 + \dots + p^{n-1})(A - E) \text{이므로} \\
 \text{(i) } p = 1 \text{일 때, } A^n &= \boxed{\text{(나)}} A - (n-1)E \\
 \text{(ii) } p \neq 1 \text{일 때, } A^n &= \boxed{\text{(다)}} A - \frac{1}{p-1}(p^n - p)E \text{이다.}
 \end{aligned}$$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

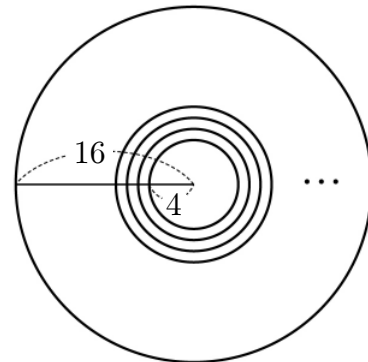
- | | | | |
|---|-----------|---------|----------------------------|
| | (가) | (나) | (다) |
| ① | p^{n-1} | $(n-1)$ | $\frac{1}{p-1}(p^{n-1}-1)$ |
| ② | p^{n-1} | n | $\frac{1}{p-1}(p^{n-1}-1)$ |
| ③ | p^{n-1} | n | $\frac{1}{p-1}(p^n-1)$ |
| ④ | p^n | $(n-1)$ | $\frac{1}{p-1}(p^{n-1}-p)$ |
| ⑤ | p^n | n | $\frac{1}{p-1}(p^n-p)$ |

10. 두 이차정사각행렬 $A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A_{n+1} = A_n B$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

으로 정의하자. 행렬 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 A_{100} 의 (1, 1)성분과 (2, 2)성분의 합은? [3점]

- ① -5 ② -3 ③ -1
 ④ 1 ⑤ 3

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 4와 16인 동심원 사이에 11개의 동심원을 그려 13개 동심원의 반지름의 길이가 등차수열을 이룰 때, 모든 동심원의 둘레의 길이의 합은? [3점]



- ① 247π ② 260π ③ 273π
 ④ 286π ⑤ 299π

12. 질량이 M , 반지름의 길이가 R 인 행성의 표면에서 물체의 탈출속력을 v 라 할 때,

$$2 \log v = \log \frac{2GM}{R} \quad (G \text{는 만유인력 상수})$$

인 관계가 성립한다.

두 행성 A, B의 질량, 반지름의 길이, 행성의 표면에서 물체의 탈출속력은 표와 같다.

구분	질량	반지름의 길이	표면에서 물체의 탈출속력
행성 A	a	b	c
행성 B	$600a$	$6b$	$k \cdot c$

이때, 상수 k 의 값은? (단, 두 행성의 모양은 구로 생각한다.) [4점]

- ① 10 ② 16 ③ 22
 ④ 28 ⑤ 34

13. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 $2S_n = a_n + \frac{9}{a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)일 때, S_{100} 을 구하는 과정이다.

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = \boxed{\text{(가)}}$
 (ii) $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로
 $2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{9}{S_n - S_{n-1}}$ 이다.
 따라서 $(S_n)^2 - (S_{n-1})^2 = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
 $\therefore S_{100} = \boxed{\text{(다)}}$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 모든 수의 합은? [4점]

- ① 39 ② 40 ③ 41
 ④ 42 ⑤ 43

14. $a = 11111, b = (10^5 + 1)a$ 일 때, $\log_3 \sqrt{b-2a} - \log_3 a$ 의 값은? [4점]

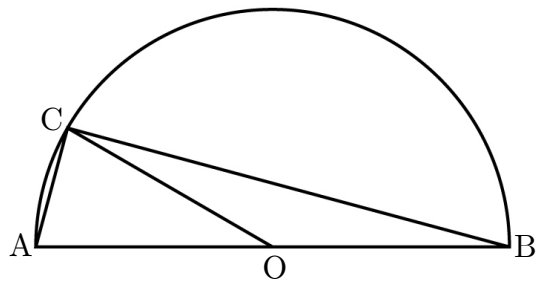
- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 정사각형 모양을 이루고 있는 (19×19) 개의 칸에 밝은 색과 어두운 색이 번갈아 칠해져 있다. 그림과 같이 밝은 색의 칸에 0부터 9까지의 모든 정수를 일정한 규칙에 따라 적었다고 할 때, 적힌 모든 수의 합은? [4점]

9	...	9		9		9		9	...	9
:	.	:	:	:	:	:	:	:	.	:
9	...	3		3		3		3	...	9
	...		2		2		2		...	
9	...	3		1		1		3	...	9
	...		2		0		2		...	
9	...	3		1		1		3	...	9
	...		2		2		2		...	
9	...	3		3		3		3	...	9
:	.	:	:	:	:	:	:	:	.	:
9	...	9		9		9		9	...	9

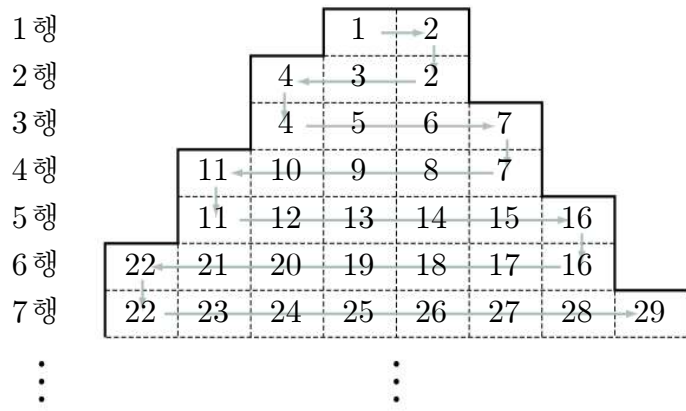
- ① 1060 ② 1080 ③ 1100
 ④ 1120 ⑤ 1140

16. 그림과 같이 점 O가 중심이고 선분 AB가 지름인 반원이 있다. 호 AB위의 점 C에 대하여 선분 AC, OC, BC의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\frac{BC}{AC}$ 의 값은? (단, $\overline{AC} < \overline{OC} < \overline{BC}$) [4점]



- ① $1 + \sqrt{2}$ ② $1 + \sqrt{3}$ ③ $2 + \sqrt{2}$
 ④ $2 + \sqrt{3}$ ⑤ $3 + \sqrt{2}$

17. 그림과 같이 자연수를 일정한 규칙에 따라 배열하였다.

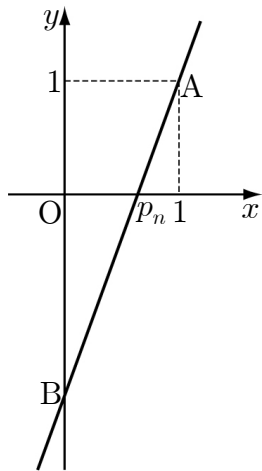


이때, 20행에 있는 모든 수의 합은? [4점]

- ① 4137
- ② 4158
- ③ 4179
- ④ 4200
- ⑤ 4221

18. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 1)$, $B(0, -n)$ 을 지나는 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 p_n 이라고 하자.

$l_n = p_{n+1} - p_n$ 이라 할 때, $10 \sum_{n=1}^8 l_n$ 의 값은? [3점]



- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

19. 집합 $S = \left\{ M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M \text{은 이차정사각행렬} \right\}$ 의

두 원소 A, B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $AB \in S$
 ㄴ. A 의 역행렬 A^{-1} 이 존재하면 $A^{-1} \in S$ 이다.
 ㄷ. $A^2 = A$ 를 만족하는 행렬 A 는 무수히 많다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2^{n+\frac{1}{2}}$ 이라 할 때,

$\log_{\sqrt{2}} a_1 + \log_{\sqrt{2}} a_2 + \log_{\sqrt{2}} a_3 + \dots + \log_{\sqrt{2}} a_{10}$ 의 값은? [3점]

- ① 63
- ② 80
- ③ 99
- ④ 120
- ⑤ 143

21. $A = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right)\left(1 + \frac{1}{2^8}\right)$ 일 때,

$\log\left(1 - \frac{1}{2}A\right)$ 의 지표는? (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.) [4점]

- ① -9 ② -8 ③ -7
 ④ -6 ⑤ -5

단답형

22. $5^{\frac{1}{\log 5}}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ 일 때,
 $f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(99)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 임의의 실수 a 에 대하여 $N(a, n)$ 을 a 의 n 제곱근($n \geq 2$) 중 실수인 것의 개수라 정의하자. 이때, 양의 실수 p 에 대하여

$$\sum_{n=2}^{100} N(-p, n) \text{의 값을 구하시오. [3점]}$$

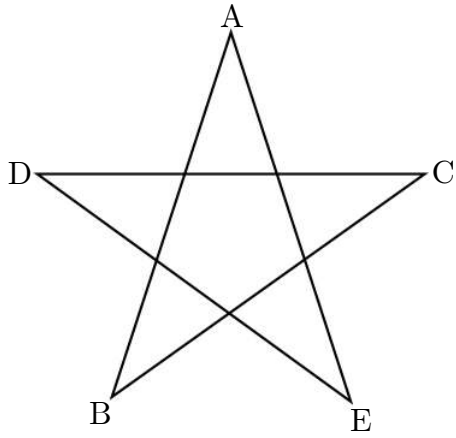
25. 2이상의 자연수 n 에 대하여 $\sqrt[n]{5^{360}}$ 이 자연수가 되게 하는 n 의 개수를 구하시오. [3점]

26. 100보다 큰 두 실수 a, b 가 $2[\log a] + 3[\log b] = 13$ 을 만족할 때, $\log ab$ 의 지표는 α 또는 β 이다. 이때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

27. 자연수 n 에 대하여 $f_n(x) = nx + \frac{n}{x}$ ($x > 0$)이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^{20} f_n(x) \text{의 최솟값을 구하시오. [4점]}$$

28. 그림의 A, B, C, D, E에 10, 12, 13, 14, 16을 적절히 하나씩 써 넣어 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EA} 의 양 끝에 있는 두 수의 합을 크기순으로 배열하여 등차수열이 되도록 하였다. 이 등차수열의 세 번째 항을 구하시오. [4점]



29. 행렬 $\begin{pmatrix} m-7 & 5 \\ 5 & m-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$ 을 $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = -1 \\ a_{n+2} - a_n = 2 \end{cases} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의할 때, $a_{15} + a_{16}$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.