

제 2 교시

수리 영역 (가 형)

1

1. $\sqrt[3]{2} \times 2^{-2} \times 2^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ 2
 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

3. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 일 때, 행렬 A^5 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 27 ② 36 ③ 45
 ④ 54 ⑤ 63

4. 함수 $f(x) = a \log_2 x + 2b$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(2) = 3$

(나) 모든 양의 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$

이때, $f\left(\frac{1}{16}\right)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
 ④ -2 ⑤ -1

5. 집합 $A = \{(x, y) | y = 2^{\log_3 x}\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

- < 보기 >
- ㄱ. $(a, b) \in A$ 이면 $(3a, 2b) \in A$ 이다.
 - ㄴ. $(a, b) \in A$ 이면 $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}) \in A$ 이다.
 - ㄷ. $(a, b) \in A$ 이고 $(c, d) \in A$ 이면 $(ac, bd) \in A$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 다항식 $x^{n+1} + x^n$ 을 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눈 나머지를 $a_n x + b_n$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값은? (단, n 은 자연수이다.) [3점]

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 2

7. 자연수 n 에 대하여 $A_n = \{x | 2n - 1 \leq \log_2 x < 2n + 1, x \text{는 자연수}\}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

- < 보기 >
- ㄱ. $A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 - ㄴ. $A_n \cap A_{n+1} = \emptyset$
 - ㄷ. 집합 A_n 의 원소의 개수는 $3 \cdot 2^{2n-1}$ 개이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 수열 $\{a_n\}$ 을 $\begin{cases} a_1 = p, a_2 = q \\ 3a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \end{cases} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? (단, p, q 는 서로 다른 실수이다.) [4점]

- ① $\frac{p+q}{2}$
- ② $\frac{2p+q}{3}$
- ③ $\frac{p+2q}{3}$
- ④ $\frac{3p+q}{4}$
- ⑤ $\frac{p+3q}{4}$

9. 다음은 이차정사각행렬 A 에 대하여 $A^2 - (1+p)A + pE = O$ 일 때, A^n ($n \geq 2$ 인 자연수)을 $\alpha A + \beta E$ 로 나타내는 과정이다. (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬, p, α, β 는 실수이다.)

$$\begin{aligned}
 A^2 - A &= p(A - E) \text{이므로} \\
 A^3 - A^2 &= p(A^2 - A) = p^2(A - E) \\
 A^4 - A^3 &= p^2(A^2 - A) = p^3(A - E) \\
 &\vdots \\
 A^n - A^{n-1} &= \boxed{\text{(가)}} (A - E) \text{이다.} \\
 \text{따라서 } A^n - A &= (p + p^2 + p^3 + \dots + p^{n-1})(A - E) \text{이므로} \\
 \text{(i) } p = 1 \text{일 때, } A^n &= \boxed{\text{(나)}} A - (n-1)E \\
 \text{(ii) } p \neq 1 \text{일 때, } A^n &= \boxed{\text{(다)}} A - \frac{1}{p-1}(p^n - p)E \text{이다.}
 \end{aligned}$$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

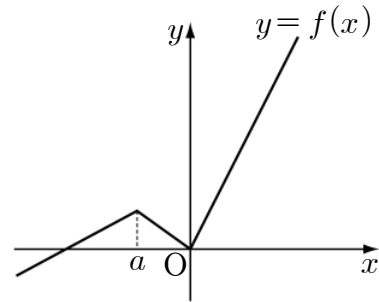
- | | | | |
|---|-----------|---------|----------------------------|
| | (가) | (나) | (다) |
| ① | p^{n-1} | $(n-1)$ | $\frac{1}{p-1}(p^{n-1}-1)$ |
| ② | p^{n-1} | n | $\frac{1}{p-1}(p^{n-1}-1)$ |
| ③ | p^{n-1} | n | $\frac{1}{p-1}(p^n-1)$ |
| ④ | p^n | $(n-1)$ | $\frac{1}{p-1}(p^{n-1}-p)$ |
| ⑤ | p^n | n | $\frac{1}{p-1}(p^n-p)$ |

10. $3 \cdot 2^n$ (n 은 자연수)의 모든 양의 약수 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{2n+2}$ 에

대하여 $S(n) = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{p_k}$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ 의 값은? [4점]

- | | | |
|-----------------|------------------|-----|
| ① $\frac{2}{3}$ | ② $\frac{4}{3}$ | ③ 2 |
| ④ $\frac{8}{3}$ | ⑤ $\frac{10}{3}$ | |

11. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=2^{f(x)}$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은? [4점]



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

12. 질량이 M , 반지름의 길이가 R 인 행성의 표면에서 물체의 탈출속력을 v 라 할 때,

$$2 \log v = \log \frac{2GM}{R} \quad (G \text{는 만유인력 상수})$$

인 관계가 성립한다.

두 행성 A, B의 질량, 반지름의 길이, 행성의 표면에서 물체의 탈출속력은 표와 같다.

구분	질량	반지름의 길이	표면에서 물체의 탈출속력
행성 A	a	b	c
행성 B	$600a$	$6b$	$k \cdot c$

이때, 상수 k 의 값은? (단, 두 행성의 모양은 구로 생각한다.) [3점]

- | | | |
|------|------|------|
| ① 10 | ② 16 | ③ 22 |
| ④ 28 | ⑤ 34 | |

13. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 $2S_n = a_n + \frac{9}{a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)일 때, S_{100} 을 구하는 과정이다.

(i) $n=1$ 일 때, $a_1 = \boxed{\text{(가)}}$
 (ii) $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{9}{S_n - S_{n-1}}$$
이다.
 따라서 $(S_n)^2 - (S_{n-1})^2 = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
 $\therefore S_{100} = \boxed{\text{(다)}}$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 모든 수의 합은? [3점]

- ① 39 ② 40 ③ 41
 ④ 42 ⑤ 43

14. $a = 11111, b = (10^5 + 1)a$ 일 때, $\log_3 \sqrt{b-2a} - \log_3 a$ 의 값은? [3점]

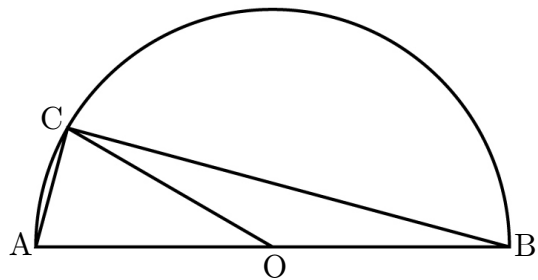
- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 정사각형 모양을 이루고 있는 (19×19) 개의 칸에 밝은 색과 어두운 색이 번갈아 칠해져 있다. 그림과 같이 밝은 색의 칸에 0부터 9까지의 모든 정수를 일정한 규칙에 따라 적었다고 할 때, 적힌 모든 수의 합은? [4점]

9	...	9		9		9		9	...	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	...	3		3		3		3	...	9
	...		2		2		2		...	
9	...	3		1		1		3	...	9
	...		2		0		2		...	
9	...	3		1		1		3	...	9
	...		2		2		2		...	
9	...	3		3		3		3	...	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	...	9		9		9		9	...	9

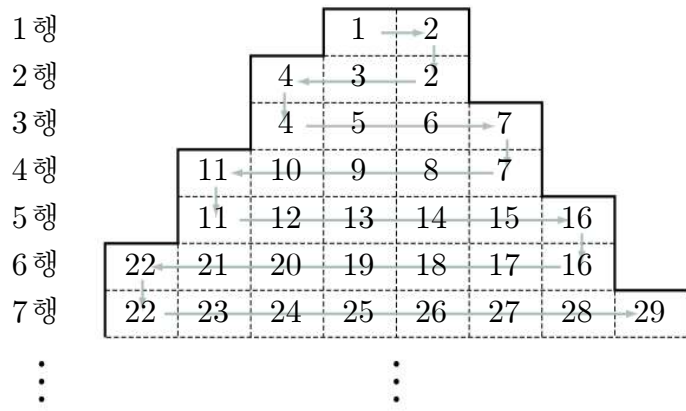
- ① 1060 ② 1080 ③ 1100
 ④ 1120 ⑤ 1140

16. 그림과 같이 점 O가 중심이고 선분 AB가 지름인 반원이 있다. 호 AB위의 점 C에 대하여 선분 AC, OC, BC의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\frac{BC}{AC}$ 의 값은? (단, $\overline{AC} < \overline{OC} < \overline{BC}$) [4점]



- ① $1 + \sqrt{2}$ ② $1 + \sqrt{3}$ ③ $2 + \sqrt{2}$
 ④ $2 + \sqrt{3}$ ⑤ $3 + \sqrt{2}$

17. 그림과 같이 자연수를 일정한 규칙에 따라 배열하였다.

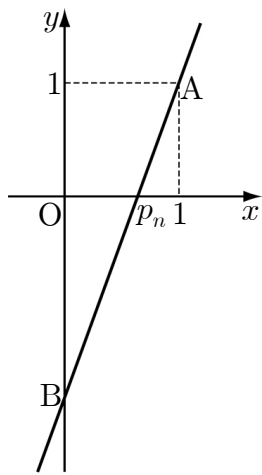


이때, 20행에 있는 모든 수의 합은? [4점]

- ① 4137
- ② 4158
- ③ 4179
- ④ 4200
- ⑤ 4221

18. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 1)$, $B(0, -n)$ 을 지나는 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 p_n 이라고 하자.

$l_n = p_{n+1} - p_n$ 이라 할 때, $10 \sum_{n=1}^8 l_n$ 의 값은? [3점]



- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

19. 집합 $S = \left\{ M \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M \text{은 이차정사각행렬} \right\}$ 의

두 원소 A, B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

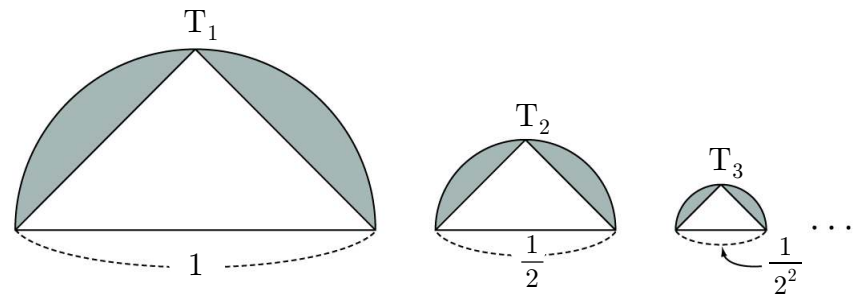
< 보기 >

ㄱ. $AB \in S$
 ㄴ. A 의 역행렬 A^{-1} 이 존재하면 $A^{-1} \in S$ 이다.
 ㄷ. $A^2 = A$ 를 만족하는 행렬 A 는 무수히 많다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 지름의 길이가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$ 인 등비수열을 이루는

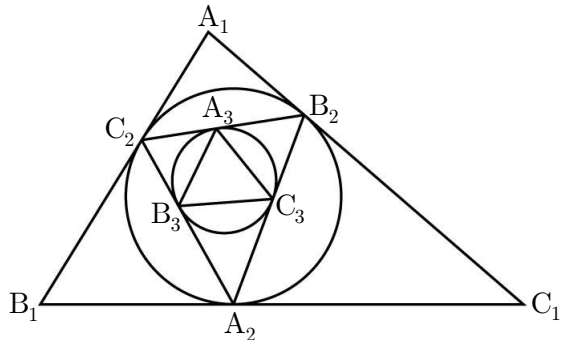
반원의 내부에 지름을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 그리고, 반원의 내부와 직각이등변삼각형의 외부의 공통부분(색칠한 부분)을 차례로 T_1, T_2, T_3, \dots 이라 하자.



T_n 의 넓이를 $S_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{n-1} \cdot S_n)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\pi-3}{2}$
- ② $\frac{\pi-2}{2}$
- ③ $\frac{\pi-1}{2}$
- ④ $\frac{\pi}{2}$
- ⑤ π

21. 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 내접원이 변 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 과 접하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2 라 하자.
삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 내접원이 변 B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 와 접하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3 이라 하자.



이와 같은 방법을 계속할 때, 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 내접원이 변 B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n 과 접하는 점을 각각 $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ 이라 하자.
다음은 삼각형 $A_nB_nC_n$ 에서 $\angle B_nA_nC_n$ 의 크기를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

$\angle A_nB_nC_n = b_n, \angle B_nC_nA_n = c_n$, 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 내심을 I_n 이라 하자.
 $\overline{I_nA_{n+1}} \perp \overline{B_nC_n}, \overline{I_nC_{n+1}} \perp \overline{A_nB_n}$ 이므로
 사각형 $I_nC_{n+1}B_nA_{n+1}$ 이 원에 내접한다.
 따라서 $\angle I_nA_{n+1}C_{n+1} = \angle I_nB_nC_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$ 이고,
 같은 방법으로 $\angle I_nA_{n+1}B_{n+1} = \text{ (가) }$ 이다.
 $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \text{ (가) }$ 이므로
 $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \text{ (나) }$ 이다.
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{ (다) }$

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|------------------|-----------------|-----------------|
| ① | $\frac{1}{4}c_n$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| ② | $\frac{1}{4}c_n$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| ③ | $\frac{1}{2}c_n$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| ④ | $\frac{1}{2}c_n$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| ⑤ | $\frac{1}{2}c_n$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ |

단답형

22. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이 있다.
함수 f 가 $f: X \rightarrow Y$ 일 때, X 의 임의의 두 원소 m, n 에 대하여 $m < n$ 이면 $\log_2 \{f(m) - f(n) + 4\} > 2$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [3점]

23. 자연수 n 에 대하여 $f(n) = 2^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ 일 때,
 $f(1) \times f(2) \times f(3) \times \dots \times f(99)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 임의의 실수 a 에 대하여 $N(a, n)$ 을 a 의 n 제곱근($n \geq 2$) 중 실수인 것의 개수라 정의하자. 이때, 양의 실수 p 에 대하여

$$\sum_{n=2}^{100} N(-p, n) \text{의 값을 구하시오. [3점]}$$

25. 다음 조건을 모두 만족하는 5자리 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) 각 자리의 숫자는 1 또는 2이다.
 (나) 같은 숫자가 연속해서 3번 이상 나올 수 없다.

26. 부등식 $2^{x-1} + 2^{-x} \leq 5$ 를 만족하는 x 에 대하여 $2^{2x-2} + 2^{-2x}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족한다.

- (가) $a_1 = p, a_{n+1} = \frac{1}{8}a_n + q$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
 (나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 16$

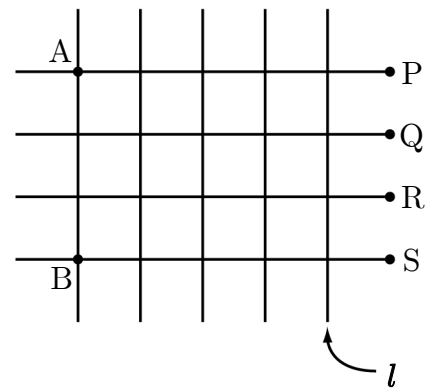
이때, 두 실수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 집합 $\{2^n \mid n \text{은 } 20 \text{이하의 자연수}\}$ 에서 서로 다른 두 수 a, b 를 임의로 선택할 때, $\log_a b$ 가 정수가 되는 모든 경우의 수를 구하시오.

[4점]

29. 행렬 $\begin{pmatrix} m-7 & 5 \\ 5 & m-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖지 않도록 하는 모든 실수 m 의 값의 합을 구하시오. [3점]

30. 그림과 같이 가로 방향 도로와 세로 방향 도로가 각각 서로 평행한 도로망이 있다. 도로망 위의 A, B지점에 숙소가 있고, P, Q, R, S지점에 관광지가 있다. 부모님을 모시고 효도관광을 온 어느 가족이 A지점에 있는 숙소를 출발하여 P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광한 후 B지점에 있는 숙소로 가기로 하였을 때, 이 가족이 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, P, Q, R, S지점에서 직선도로 l 까지의 거리는 모두 같다.) [4점]



※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.