2009 대학수학능력시험 대비

2008학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	③	2	③	3	③	4	④	5	⑤
6	④	7	①	8	⑤	9	②	10	①
11	②	12	③	13	⑤	14	②	15	①
16	⑤	17	④	18	24	19	26	20	27
21	160	22	35	23	51	24	30	25	100

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{-\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=2$

2. [출제의도] 무리방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-1)(x-2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=6$ ($\because\ x=1$은 무연근)

따라서 모든 실근의 합은 8이다.

3. [출제의도] 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{13}{25}$

4. [출제의도] 분수부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x-2)=ax(x-4)(x+4)$ $(a>0)$이므로

$\frac{f(x-2)}{x}=a(x-4)(x+4)\leq 0$ $(x\neq 0)$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 8이다.

5. [출제의도] 타원을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=a$, $\overline{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}a$, $\overline{\mathrm{AO}}=b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. [출제의도] 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면의 법선벡터는 $(1,3,5)-(1,7,2)=(0,-4,3)$이고,

xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로

$\cos\theta=\frac{|(0,-4,3)\cdot(0,0,1)|}{|(0,-4,3)|\times|(0,0,1)|}=\frac{3}{5}$

7. [출제의도] 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=ax^3+bx$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b=3a\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$ $\therefore b=-\frac{3a}{4}$

$f(x)=ax^3-\frac{3a}{4}x=ax\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\triangle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\square\mathrm{ADBC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(\text{극댓값})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 극댓값은 1이다.

8. [출제의도] 벡터의 내적을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$이지만 $|\vec{x}|=\sqrt{2}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$ 인 경우가 있다. (거짓)

ㄴ. $|\vec{x}|=\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$이면 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$는 수직이 될 수 없다. $\therefore\ \vec{x}\cdot\vec{y}\neq 0$ (참)

ㄷ. 주어진 도형을 좌표평면에서 생각하면 $\vec{x}$, $\vec{y}$의 성분은 모두 정수이므로 $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 항상 정수이다. (참)

9. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{h\to 0}|(2+h)^2-(2-h)^2|=\lim\limits_{h\to 0}|8h|=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{h\to 0}|[2+h]-[2-h]|=|2-1|=1$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=\begin{cases}x & (x\neq 2)\\ 0 & (x=2)\end{cases}$이면

$\lim\limits_{h\to 0}|f(2+h)-f(2-h)|=\lim\limits_{h\to 0}|(2+h)-(2-h)|=0$이지만

$x=2$에서 불연속이다. (거짓)

10. [출제의도] 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1+S_2+S_3=1$, $2S_2=S_1+S_3$ $\cdots$ ㉠

$S_1=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $S_2=\frac{1}{3}$, $S_3=\frac{1}{2}$

$ax^2=1$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(\because x>0)$이므로

$S_3=\frac{1}{\sqrt{a}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}ax^2dx=\frac{1}{2}$에서 $a=\frac{16}{9}$

11. [출제의도] 직선과 삼각형이 만날 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 ABC는 평면 $z=1$ 위에 있으므로 직선의 방정식에 $z=1$을 대입하면 삼각형 ABC를 품는 평면과 직선 l의 교점의 좌표는 $(-a-2,1,1)$이다.

평면 $y=1$과 선분 CA, CB의 교점의 x좌표가 각각 $2,-1$이므로 $-1\leq -a-2\leq 2$에서 $-4\leq a\leq -1$

따라서 구하는 정수 a의 개수는 4이다.

12. [출제의도] 행렬의 연산의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A(A-4E)=E$ 이므로 $A^{-1}=A-4E$이다. (참)

ㄴ. (반례) $A=E$이면 $A^2-A=O$이지만 행렬 A의 역행렬이 존재한다. (거짓)

ㄷ. 대우 'A^2의 역행렬이 존재하면 A^3의 역행렬이 존재한다.'는 참이므로 주어진 명제는 참이다. (참)

13. [출제의도] 수열의 극한을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 식을 이용하여 각 항을 차례로 나열하면

$1,2,1,2,1,2,\cdots$

ㄱ. n이 홀수이면 $a_n=1$이므로 $a_{11}=1$이다. (참)

ㄴ. $a_{2n}=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=2$이다. (참)

ㄷ. $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum\limits_{k=1}^{2m}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{3m}{2m}=\frac{3}{2}$

$n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\sum\limits_{k=1}^{2m-1}a_k=\lim\limits_{m\to\infty}\frac{3m-2}{2m-1}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$ (참)

14. [출제의도] 이항정리를 이용하여 명제를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가) x^n (나) ${}_n\mathrm{C}_{n-k}$ (다) $1\leq k\leq n-1$

15. [출제의도] 도형의 넓이에 관한 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{DP_1}}=2$, $\triangle\mathrm{DP_1D_1}\backsim\triangle\mathrm{BCD_1}$이므로 $\overline{\mathrm{DD_1}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ S_1=\frac{8}{3}$

한편, 정사각형 $\mathrm{BC_1D_1A_1}$의 한 변의 길이는 $\frac{8}{3}$이므로 각 정사각형의 넓이는 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{24}{5}$

16. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

직선 $y=2x$ 위의 한 점 P를 $(a,2a)$라 하면

$\mathrm{A}(a,4^a)$, $\mathrm{B}(4^a,2a)$이므로

$\frac{S_3}{S_1}=\frac{(4^a-a)2a}{(4^a-2a)a}=\frac{7}{3}$, $4^a=8a$

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(4^a-a)(4^a-2a)}{(4^a-2a)a}=\frac{k}{3}$ $\therefore\ k=21$

17. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$N(5)=\frac{K}{1+c\cdot a^{-5b}}=\frac{K}{2}$에서 $c=a^{5b}$이므로

$N(7)=\frac{K}{1+a^{-2b}}=\frac{3}{4}K$에서 $a^{-2b}=\frac{1}{3}$이다.

$\therefore\ N(9)=\frac{K}{1+a^{-4b}}=\frac{K}{1+(a^{-2b})^2}=\frac{9}{10}K$

18. [출제의도] 삼차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0$에서 $x=-2,\ 0$

$f(-1)=12$, $f(0)=10$, $f(1)=14$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $14+10=24$이다.

19. [출제의도] 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$이어야 하므로

$\frac{a+5}{1+b}=a=\frac{5}{b}$에서 $ab=5$

$a=1$, $b=5$ 또는 $a=5$, $b=1$이므로 $a^2+b^2=26$

20. [출제의도] 정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $f(x)g(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$

(다)에서 $g'(x)=2f(x)$, $g(1)=0$이므로

$f(x)=x+1$, $g(x)=(x-1)(x+3)$ ($\because f'(x)=1$)

$\therefore\ \int_0^3 3g(x)dx=\int_0^3 3(x^2+2x-3)dx=27$

21. [출제의도] 세 평면의 교점을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 네 평면 중 세 평면이 만나는 점이 사면체의 꼭짓점이므로 $\mathrm{A}(0,0,4)$, $\mathrm{B}(0,4,0)$, $\mathrm{C}(2,2,0)$이다.

따라서 사면체 OABC의 부피는

$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 2\right)\times 4=\frac{16}{3}$ $\therefore\ 30V=160$

22. [출제의도] 이항분포의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$10\mathrm{P}(X=3)=10p^3$, $\mathrm{P}(Y\geq 3)=16p^3(2-3p)$이므로

$10p^3=16p^3(2-3p)$ 즉, $10=16(2-3p)$이다.

따라서 $p=\frac{11}{24}$ 이므로 $m+n=35$ 이다.

23. [출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) 두 사람이 모두 비기는 경우 : 1(가지)

(ii) 갑이 1승 1패 3무인 경우 : $\frac{5!}{3!}=20$(가지)

(iii) 갑이 2승 2패 1무인 경우 : $\frac{5!}{2!2!}=30$(가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $1+20+30=51$(가지)

24. [출제의도] 수열의 성질을 이해하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$30a_{30}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{29})$

$=a_{30}+(a_{30}-a_1)+(a_{30}-a_2)+\cdots+(a_{30}-a_{29})$

$=1+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+\cdots+30\times\frac{1}{30}=30$

25. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&4\\6&5\end{pmatrix}$에서 $BC=\begin{pmatrix}0&0\\9&9\end{pmatrix}=9B$

$BC^{50}=9BC^{49}=9^2BC^{48}=\cdots=9^{50}B$이다.

행렬 A의 $(2, 1)$성분은 $9^{50}=3^{100}$이므로 $n=100$이다.

[미분과 적분]

26	②	*27*	①	*28*	④	*29*	⑤	*30*	25

26. [출제의도] 배각공식을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}\tan\frac{\theta_n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2\tan\frac{\theta_n}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta_n}{2}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

27. [출제의도] 합성함수의 미분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(f(1))=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$
$$=f''(f(1))f'(1)=f''(2)\cdot3=3$$

$\therefore\ f''(2)=1$

28. [출제의도] 로그함수의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(t,\ \ln(2t+1))$이라 하면 $a\to\infty$일 때 $t\to0$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\ln(2t+1)$, $S_2=\frac{t}{2}$이므로

$$\alpha=\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(2t+1)}{t}=2$$

29. [출제의도] 회전체의 부피의 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그릇에 남은 물의 부피는 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $x=\sin\theta$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 입체의 부피와 같다.

ㄱ. $H(\theta)=1-\sin\theta$ (참)

ㄴ. 수면의 반지름의 길이는 $\cos\theta$이므로 $S(\theta)=\pi\cos^2\theta$이다. (참)

ㄷ. $V(\theta)=\pi\int_{\sin\theta}^{1}(1-x^2)\,dx$이므로

$$\frac{d}{d\theta}V(\theta)=\pi(-\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta)$$
$$=-\pi\cos^3\theta=-S(\theta)\cos\theta$$ (참)

30. [출제의도] 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=10\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AQ}}=10\cos2\theta$

$\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{BP}}=10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{20\cos\theta}$

$\frac{d}{dt}\overline{\mathrm{AQ}}=-20\sin2\theta\frac{d\theta}{dt}=-40\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=-2\sin\theta$

$t=5$일 때, $10\sin\theta=\frac{5}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{4}$이다.

$p=-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$이므로 $100p^2=25$이다.

[확률과 통계]

26	④	*27*	④	*28*	②	*29*	①	*30*	64

26. [출제의도] 줄기와 잎 그림을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

수정한 후의 줄기와 잎 그림은 다음과 같다.

줄기	잎
5	7 7 7
6	1 3 7
7	5 5 6
8	0

ㄱ. 평균이 작아진다. (참)

ㄴ. 범위는 변하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 중앙값이 71에서 65로 작아진다. (참)

27. [출제의도] 확률밀도함수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $F(0.3)=\mathrm{P}(X\geqq0.3)\leqq\mathrm{P}(X\geqq0.2)=F(0.2)$ (참)

ㄴ. (반례) X의 확률밀도함수가 $f(x)=2x$이면 $F(0.4)=\mathrm{P}(X\geqq0.4)>G(0.6)=\mathrm{P}(X\leqq0.6)$ (거짓)

ㄷ. $F(0.7)+G(0.7)=F(0.2)+G(0.2)=1$

$\therefore\ F(0.2)-F(0.7)=G(0.7)-G(0.2)$ (참)

28. [출제의도] 모비율을 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$$ 이므로

$$\mathrm{P}(0.16\leqq\hat{p}\leqq0.26)=\mathrm{P}\left(\frac{0.16-0.2}{0.04}\leqq Z\leqq\frac{0.26-0.2}{0.04}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\leqq Z\leqq1.5)=0.3413+0.4332=0.7745$$

29. [출제의도] 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 P가 세 번 이동할 때 두 점 A, P 사이의 거리는 1 또는 $\sqrt{3}$이다.

점 P가 세 번 이동하는 방법의 수는 $3^3=27$(가지)

이때, 두 점 A, P 사이의 거리가 $\sqrt{3}$인 방법의 수는 $3\times2\times1=6$(가지)

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{6}{27}=\frac{7}{9}$이다.

30. [출제의도] 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

한 학생의 통학 시간을 확률변수 X라 하면

$p_1=\mathrm{P}(X\geqq35)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{35-25}{5}\right)=0.02$

따라서 2500명 중 통학 시간이 35분 이상인 학생의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따르므로 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

이때, $p_2=\mathrm{P}(Y\geqq n)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\frac{n-50}{7}\right)=\mathrm{P}(Z\geqq2)$이어야 하므로 $\frac{n-50}{7}=2$이다.

$\therefore\ n=64$

[이산수학]

26	④	*27*	②	*28*	①	*29*	③	*30*	19

26. [출제의도] 수열의 점화관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{f_n\}$은 $-1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, \cdots$이므로

수열 $\{f_n{}^2\}$은 $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \cdots$이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{100}f_n{}^2=2\times33+1=67$

27. [출제의도] 그래프를 적절하게 색칠할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 그래프의 꼭짓점을 적절하게 색칠할 수 있는 최소의 색의 수는 2이다.

ㄱ. 3개 ㄴ. 2개 ㄷ. 3개

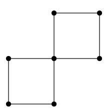
28. [출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

1개, 4개로 나누어 저장하는 경우는 3가지이고,

2개, 3개로 나누어 저장하는 경우는 ${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3=10$가지이므로 $10+3=13$(가지)이다.

29. [출제의도] 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

그래프 G는 오른쪽과 같다.

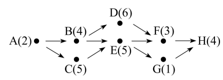


ㄱ. 변의 개수가 8이므로 모든 꼭짓점의 차수의 합은 16이다. (참)

ㄴ. 모든 꼭짓점의 차수가 짝수이므로 오일러회로가 존재한다. (참)

ㄷ. 해밀턴회로는 존재하지 않는다. (거짓)

30. [출제의도] 그래프를 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.



위 그래프에서 구하는 최소의 작업 일수는 각 경로에 필요한 작업 일수의 최댓값과 같으므로 19(일)이다.

수리'나'형 정답

1	③	*2*	④	*3*	③	*4*	①	*5*	②
6	④	*7*	⑤	*8*	④	*9*	②	*10*	⑤
11	①	*12*	③	*13*	⑤	*14*	②	*15*	①
16	⑤	*17*	④	*18*	12	*19*	64	*20*	21
21	27	*22*	35	*23*	51	*24*	30	*25*	100
26	②	*27*	④	*28*	①	*29*	③	*30*	49

해 설

1. '가'형과 같음.

2. [출제의도] 행렬을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A=\begin{pmatrix}2&2\\4&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$이므로 $AB=\begin{pmatrix}4&8\\8&16\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 36이다.

3. '가'형과 같음.

4. [출제의도] 수열의 규칙을 이해하여 그 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$은 1, 11, 111, 1111, 11111, $\cdots$

이때, a_n을 3으로 나눈 나머지는 차례로 다음과 같다.

1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, $\cdots$

따라서 $\sum_{n=1}^{30}b_n=\sum_{n=1}^{10}3=30$이다.

5. [출제의도] 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 $36-9=27$(가지)이고, 짝수를 포함한 두 수의 합이 6 또는 8인 경우는 $(2, 4)$, $(2, 6)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$이므로 구하는 확률은 $\frac{5}{27}$이다.

6. [출제의도] 순서도를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$S=\sum_{k=1}^{100}2k=2\left(\frac{100\times101}{2}\right)=10100$$

7. [출제의도] 이항정리를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

${}_{10}\mathrm{C}_r\,x^{10-r}(x^{-n})^r={}_{10}\mathrm{C}_r\,x^{10-(n+1)r}$ $(0\leqq r\leqq10)$

이때, $10-(n+1)r=0$, $(n+1)r=10$을 만족하는 순서쌍 $(r,\ n)$은 $(1,\ 9)$, $(2,\ 4)$, $(5,\ 1)$이다.

따라서 n의 값들의 합은 14이다.

8. [출제의도] 정규분포를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(400\leqq X\leqq440)=\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq2)=0.48$이므로 수출한 과일은 $30000\times0.48=14400$(개)이다.

9. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 그 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 두 행렬만 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^2=E$이다. (참)

ㄴ. $X\in P$이면 $X^2=E$ 또는 $X^2=X$이므로 항상 $X^3=X$가 성립한다. (참)

ㄷ. (반례) $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\not\in P$ (거짓)

10. [출제의도] 조합의 성질을 이용하여 직사각형의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=2}^{20} a_{2k} = a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{40}$$

$$= {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{20}\mathrm{C}_2 = {}_{21}\mathrm{C}_3 = 1330$$

11. [출제의도] 수열을 이용하여 나누어진 영역의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1 = 6,\ a_2 = 12,\ a_3 = 20,\ a_4 = 30,\ \cdots$

$a_n = 6 + \sum_{k=1}^{n-1}(2n+4) = n^2 + 3n + 2$이므로 $a_{10} = 132$이다.

12~17. '가'형과 같음.

18. [출제의도] 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -3$ 에서 $0 < x-2 < 8$

즉, $2 < x < 10$ 이므로 $\alpha + \beta = 12$이다.

19. [출제의도] 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x) = 2^{-(x-2)^2 + a + 4}$에서 지수의 최솟값은 a이므로 $2^a = 2^2$ 즉, $a = 2$이다. 이때, 지수의 최댓값은 $a + 4 = 6$이므로 $f(x)$의 최댓값은 $2^6 = 64$이다.

20. [출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 조건을 만족하는 행렬의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b & b(a+c) \\ a+c & b+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $c = -a,\ b = -a^2 + 1$을 만족하는 a^2의 값은 0, 1, 4, ⋯, 100등의 모두 11개이다. $a^2 = 0$을 만족하는 경우의 행렬은 1개이고 그 이외의 경우는 모두 2개씩 있으므로 구하는 행렬의 개수는 모두 21(개)이다.

21. [출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{H}_n$의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 $S_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$a = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{9}$ 이므로 $\frac{1}{a^2} = 27$이다.

22~25. '가'형과 같음.

26. [출제의도] 가수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log a = 1 + \alpha\ (0 < \alpha < 1)$라 하면 $f(a) = \alpha$

$\log\frac{1}{a} = -\log a = (-2) + (1-\alpha)$이므로 $f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \alpha$

$$\{f(a)\}^2 + \left\{f\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^2 = \alpha^2 + (1-\alpha)^2 = 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 < \alpha < 1$에서 $\alpha = \frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

27. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하여 그 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_m + a_n = a_{m+n}$에서

$a + (m-1)d + a + (n-1)d = a + (m+n-1)d$

$a = d,\ a_n = an\ \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} an = 55a$

28. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

비밀번호에 쓸 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 7, 8이다.
첫째 자리가 7이고 마지막 두 자리가 4의 배수인 경우는 2×3가지이고, 첫째 자리가 8인 경우도 2×3가지이다. 따라서 구하는 경우의 수는 $2\times6 = 12$이다.

29. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 로그의 값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\log_2 16 < 2\log_2 5 = \log_2 25 < \log_2 32$이므로

$2 \leqq \log_2 5 < 2 + \frac{1}{2}\ \ \therefore \log_2 5 \in A_2$ (참)

ㄴ. (반례) $\log_2\sqrt{6} \in A_1$이지만

$\frac{7}{2} = \log_2\sqrt{128} < \log_2 5\sqrt{6} = \log_2\sqrt{150}$ 이므로

$\log_2 5\sqrt{6} \notin A_3$이다. (거짓)

ㄷ. $\log_2 a \in B_{10}$이므로 $10 + \frac{1}{2} \leqq \log_2 a < 10 + 1$

$5 + \frac{1}{4} < \log_2\sqrt{a} < 5 + \frac{1}{2}$이므로 $\log_2\sqrt{a} \in A_5$이다. (참)

30. [출제의도] 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

구하는 확률은 $1 - \frac{15}{81} = \frac{22}{27}$이므로 $p + q = 49$이다.