2009학년도 9월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$$2^{2\log_3 9} = 2^{4\log_3 3} = 2^4 = 16$$

답 ②

2.

$$\begin{aligned} A(2A^{-1}+3E) &= 2AA^{-1}+3A \\ &= 2E+3A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 15 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서, 모든 성분의 합은

$$11+6+15+(-10)=22$$

답 ①

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{1}{5}$$

답 ②

4.

두 사건 A, B가 서로 배반 사건이므로

$A \cap B \neq \varnothing$

이고

$A \cap B^c = A-(A\cap B) = A$

$A^c \cap B = B-(A\cap B) = B$

이므로

$P(A\cap B^c) = P(A)$, $P(A^c \cap B) = P(B)$

$$\begin{aligned} \therefore \ P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

답 ①

5.

조사 대상인 1000명 중 혈액형이 B형인 학생의 수는

150+ 6+ 80+ 4=240(명)

이 중 혈액형이 B형이고 Rh$^+$형의 남학생의 수는

150(명)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{150}{240} = \frac{5}{8}$$

답 ④

6.

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{4}{10}+3p=1 \quad \therefore \ p=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\times\frac{3}{10}+2p+3\times\frac{1}{10}+4p+5p \\ &= \frac{6}{10}+11p = \frac{14}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \ E(5X+3) &= 5E(X)+3 \\ &= 5\times\frac{14}{5}+3 = 17 \end{aligned}$$

답 ①

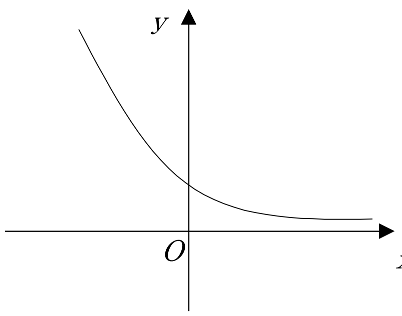
7.

$f(x)=x+1$ 이므로

$y=2^{2-f(x)}=2^{2-(x+1)}$

$=2^{-x+1}=2^{-(x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

따라서, $y=2^{2-f(x)}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



답 ④

8.

직선 $y=ax$와 곡선 $y=x^2-2x+4$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식

$$x^2-2x+4=ax$$

즉,

$$x^2-(a+2)x+4=0$$

의 판별식 D가 0보다 커야 한다.

$$D=(a+2)^2-16=a^2+4a-12$$
$$=(a+6)(a-2)>0$$

$\therefore\ a>2\ (\because\ a+6>0)$

$\therefore\ a=3,4,5,6$

따라서 사건 A가 일어날 확률은

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포

$$\mathrm{B}\left(300,\ \frac{2}{3}\right)$$

을 따른다.

$$\therefore\ E(X)=300\times\frac{2}{3}=200$$

답 ④

9.

자연수 k에 대하여

$\log k=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)

점 $P_k(\alpha,\ n)$이 곡선 $y=(\sqrt{10})^x$ 위에 있으려면

$n=(\sqrt{10})^{\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}$

$\alpha=2\log n=\log n^2$

$0\le\alpha<1$이므로 $\alpha=\log n^2$의 값은

$n=1,2,3$일 때, $\log 1$, $\log 4$, $\log 9$

$\therefore\ \log k=1$ 또는 $\log k=2+\log 4$

또는 $\log k=3+\log 9$

$\therefore\ k=10$ 또는 $k=400$ 또는 $k=9000$

따라서 모든 k의 값의 합은

$10+400+9000=9410$

답 ⑤

10.

$y=2^{x+n}$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 만나는 점이 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이므로

$2^{x+n}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$2^{x+n}=2^{-x}$

$x+n=-x$

$\therefore\ x=-\frac{n}{2}$

그러므로 $a_n=-\frac{n}{2}$, $b_n=2^{-\frac{n}{2}}$

2009학년도 9월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = -\dfrac{n}{2}$이므로 첫째항이 $-\dfrac{1}{2}$, 공차가 $-\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다. <참>

ㄴ. $b_m b_n = 2^{-\frac{m}{2}} \cdot 2^{-\frac{n}{2}}$

$= 2^{-\frac{m}{2} + -\frac{n}{2}}$

$= 2^{-\frac{m+n}{2}}$

$= b_{m+n}$ <참>

ㄷ. 부등식 $2b_n < b_{n+1}$을 풀면

$2 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} < 2^{-\frac{n+1}{2}}$

$2^{1+-\frac{n}{2}} < 2^{-\frac{n+1}{2}}$

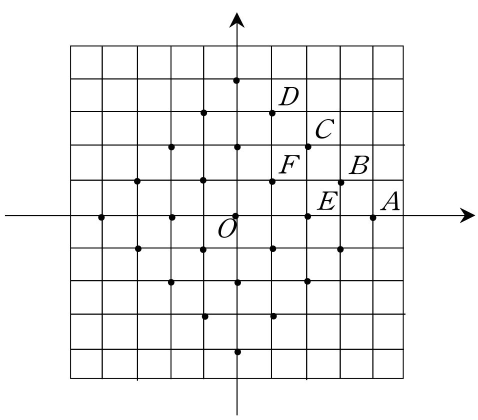
밑이 1보다 크므로

$1 + \dfrac{n}{2} < \dfrac{n+1}{2}$

이 때, $1 + \dfrac{n}{2} < \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}$이므로 부등식을 만족하는 자연수 n은 존재하지 않는다.
<거짓>

답 ③

11.



그림과 같이 점 O를 원점으로 하는 좌표평면 위에 길을 옮겨 놓는다.

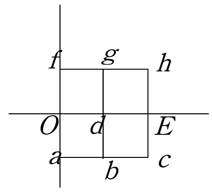
그림에서 A, B, C, D, E, F를 도착점으로 하는 경우의 수를 구한 후에 대칭성을 이용한다.

$O \to A$: 1(가지)

$O \to B$: $\dfrac{4!}{3!} = 4$(가지)

$O \to C$: $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$(가지)

$O \to D$: $\dfrac{4!}{3!} = 4$(가지)



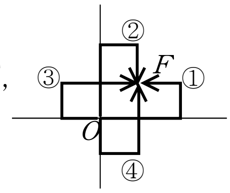
[그림1]

$O \to E$: 그림1과 같이

$OabcE, OdbcE, OabdE,$

$OfghE, OdghE, OfgdE$

의 6(가지)



[그림2]

$O \to F$: 그림2와 같이

4(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$4(1+4+6+4+6+4)$

$= 100$ (가지)

답 ③

12.

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$ 에서

$a \neq b$ 이므로 $2a \neq 2b$

$a \neq c$ 이므로 $2a \neq 2c$

$a + d = b + c$ 에서

$2a + 2d = 2(a+d) = 2(b+c) = 2b + 2c$

$\therefore\ 2A \in S$ (참)

ㄴ. 공차를 $d\ (d > 0)$라 하면

$p = 1 + d,\ q = 1 + 2d,\ r = 1 + 3d$

이므로 $1 \neq p,\ 1 \neq q$ 이고

$1 + r = p + q = 2 + 3d$

$\therefore\ X \in S$ (참)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$a+d=b+c$ 에서 $d=b+c-a$ 이므로

$$ad-bc=a(b+c-a)-bc$$
$$=ab-ac-a^2-bc$$
$$=(a-c)(b-a)$$

그런데 $a\neq b$, $a\neq c$ 이므로

$(a-c)(b-a)\neq 0$

따라서 A 는 역행렬을 가진다. (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13. 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$f(x)=f(100-x)$ 이므로 $f(x)$ 는

$x=50$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 평균 $m=50$ 이고 표본평균

$\overline{X}$ 는 평균이 50 이고 표준편차가

$\frac{10}{\sqrt{25}}=2$ 인 정규분포를 따른다.

$$\therefore P(44\leq \overline{X}\leq 48)$$
$$=P\left(\frac{44-50}{2}\leq Z\leq \frac{48-50}{2}\right)$$
$$=P(-3\leq Z\leq -1)$$

한편 주어진 그래프에서 구간별 확률은

$P(-1\leq Z\leq 1)=0.6826$

$P(-3\leq Z\leq 3)=0.9974$

이므로

$$P(-3\leq Z\leq -1)$$
$$=P(0\leq Z\leq 3)-P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=\frac{0.9974}{2}-\frac{0.6826}{2}=0.1574$$

답 ②

14.

처음 빵의 개당 무게와 가격을 각각

Ag, B원

이라 하자.

1번 시행 후 개당 무게는 $0.9A$g이므로

n번 시행 수 개당 무게는 $(0.9)^nA$g

처음 빵의 1g당 가격은 $\frac{B}{A}$ 원

n번 시행 후 1g당 가격은 $\frac{B}{(0.9)^nA}$ 원

$\frac{B}{(0.9)^nA}\geq\frac{3}{2}\times\frac{B}{A}$ 에서

$$(0.9)^{-n}\geq\frac{3}{2}$$
$$-n\log\frac{9}{10}\geq\log 3-\log 2$$
$$n(1-2\log 3)\geq\log 3-\log 2$$
$$n\geq\frac{0.4771-0.3010}{1-2\times 0.4771}=\frac{0.1761}{0.0458}=3.8\times\times\times$$

따라서, 구하는 정수 n의 최솟값은 4이다.

답 ②

15.

ㄱ. $f(x)$의 역함수를 구하면 $x=2^{y-2}+1$ 에서

$$2^{y-2}=x-1$$
$$y-2=\log_2(x-1)$$
$$\therefore\ y=\log_2(x-1)+2$$

따라서, $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)+2$이고

$g(x)=f^{-1}(x)$

ㄱ. $f^{-1}(5)=\log_2(5-1)+2=4$이므로

$$f^{-1}(5)\{g(5)+1\}$$
$$=f^{-1}(5)\{f^{-1}(5)+1\}$$
$$=4(4+1)=20$$ <참>

ㄴ. $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$

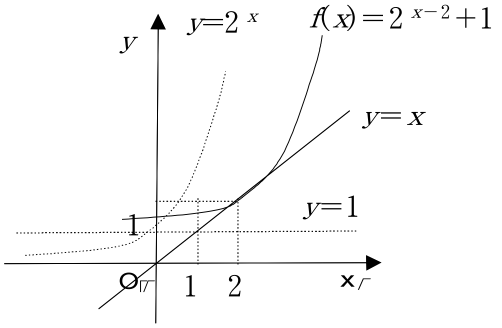
의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. <참>

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 $y=2^x$의 그래프 위의 점 (0, 1)은 $y=f(x)$의 그래프위의 점 (2, 2)로 평행이동한다.

이 때, 점 (2, 2)는 직선 $y=x$위의 점이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$의 그래프는 만난다.

그러므로 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 만난다. <거짓>



답 ③

16.

$B=A-\dfrac{p+q}{2}E$, $k=\left[\dfrac{p-q}{2}\right]$라 하면

$B-kE=A-pE$이고 $B+kE=A-qE$이므로 $B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$$B-kE=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}$$

는 역행렬을 갖지 않으므로

$$(a-k)(d-k)-bc=ad-k(a+d)+k^2-bc$$
$$=0$$

$k\neq 0$이므로 $a+d=[\,0\,]$, $ad-bc=-k^2$이다. 그런데

$$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$=\dfrac{1}{k^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$($\because\ a+d=0$, $ad-bc=-k^2$)

$$=\frac{1}{k^2}[\,B\,]$$

이므로

$$A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)$$
$$=O$$

가 성립한다.

답 ③

17.

사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하자.

이 때, $\overline{AB_1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2}$, $\overline{B_1C_1}=a$, $\overline{AC_1}=1$이므로 직각삼각형 AB_1C_1에서

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+a^2=1^2$$

$$\frac{5}{4}a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{4}=0$$

$$5a^2+2a-3=(5a-3)(a+1)=0$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{5}\ (\because\ a>0)$$

따라서 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{3}{5}$, 공비가 $\dfrac{3}{5}$인 등비수열임을 알 수 있다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}} = \frac{9}{16}$$

답 ②

18.

$a_9 = S_9 - S_8$

$= (2^9 - 1) - (2^8 - 1) = 256$

답 256

19.

$6.15 = 0.67\log(0.37E_1) + 1.46 \cdots$ ㉠

$5.48 = 0.67\log(0.37E_2) + 1.46 \cdots$ ㉡

㉠-㉡에서

$0.67 = 0.67\{\log(0.37E_1) - \log(0.37E_2)\}$

$0.67 = 0.67\log\frac{E_1}{E_2}$, $1 = \log\frac{E_1}{E_2}$

$\therefore \frac{E_1}{E_2} = 10$

답 10

20.

$3^{a+b} = 4$에서

$a+b = \log_3 4$ ⋯ ㉠

$2^{a-b} = 5$에서

$a-b = \log_2 5$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 각 변끼리 각각 곱하면

$(a+b)(a-b) = \log_3 4 \times \log_2 5$

$= \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 2}$

$= 2 \times \frac{\log 5}{\log 3} = 2\log_3 5$

$= \log_3 5^2 = \log_3 25$

$\therefore a^2 - b^2 = \log_3 25$

따라서 로그의 정의에 의해

$3^{a^2-b^2} = 25$

답 25

21.

$(1-x)^4(2-x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_4C_0 \cdot 1^4 \cdot (-x)^0 \times {}_3C_2 \cdot 2 \cdot (-x)^2$

$+ {}_4C_1 \cdot 1^3 \cdot (-x)^1 \times {}_3C_1 \cdot 2^2 \cdot (-x)^1$

$+ {}_4C_2 \cdot 1^2 \cdot (-x)^2 \times {}_3C_0 \cdot 2^3 \cdot (-x)^0$

$= 6 + 48 + 48$

$= 102$

답 102

22.

자연수 n에 대하여 $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이 되는 k는

$(n-1) + \frac{1}{2} \le \sqrt{k} < n + \frac{1}{2}$

$n - \frac{1}{2} \le \sqrt{k} < n + \frac{1}{2}$

양변을 제곱하면

$n^2 - n + \frac{1}{4} \le k < n^2 + n + \frac{1}{4}$

이 조건을 만족하는 자연수 k는 $n^2 - n + 1$부터 $n^2 + n$까지의 수이므로

$a_n = (n^2 + n) - (n^2 - n + 1) + 1$

$=2n$

따라서

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=1}^{10} 2i$$

$$=2\times\frac{10\times 11}{2}=110$$

답 110

23.
할아버지, 할머니가 앉는 열과 아버지, 어머니가 앉는 열을 정하는 경우의 수는

2(가지)

그 각각에 대하여 아들과 딸이 앉는 열을 정하는 경우의 수는

2(가지)

1열에서 세 사람이 앉을 때, 특정한 2명이 이웃하도록 앉는 경우의 수는

$2!\times 2!=4$(가지)

2열에서 세 사람이 앉을 때, 특정한 2명이 이웃하도록 앉는 경우의 수는

$2!\times 2!=4$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$2\times 2\times 4\times 4=64$(가지)

답 64

24. $A_1(1,\ 0)$, $B_1(0,\ 1)$, $C_1(1,\ 1)$ 에서

$a_1=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $b_1=3$

$\overline{A_2B_2}$ 의 중점이 $C_1(1,\ 1)$ 이므로

$A_2(2,\ 0)$, $B_2(0,\ 2)$, $C_2(2,\ 2)$

$a_2=2\times 2\times\frac{1}{2}=2$, $b_2=6$

$\overline{A_3B_3}$ 의 중점이 $C_2(2,\ 2)$ 이므로

$A_3(2^2,\ 0)$, $B_2(0,\ 2^2)$, $C_2(2^2,\ 2^2)$

$a_3=2^2\times 2^2\times\frac{1}{2}=8$, $b_3=12$

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$, $b_n=3\cdot 2^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^n b_n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}\cdot 3}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n-1}\cdot 3}{2^{2n}}}{\frac{2^{2n-3}}{2^{2n}}+\frac{2^n}{2^{2n}}}$$

$$=\frac{3\cdot 2^{-1}}{2^{-3}}=12$$

답 12

25. $2^x=X$, $3^y=Y$ 라고 하면

주어진 식은

$$\begin{cases} 3X-2Y=6 \\ \frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1 \end{cases}$$ 이므로

두 식을 연립하여 X, Y 를 구하면

$X=8$, $Y=9$

즉 $2^x=8$, $3^y=9$ 이므로

$\alpha=3$, $\beta=2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=3^2+2^2=13$

답 13

26.
철수가 꺼낸 공에 적혀있는 수가 6인 사건을 A라 하면

$$P(A)=\frac{1}{10}$$

남은 두 사람이 꺼낸 공에 적혀있는 수가 하나는 6보다 크고 다른 하나는 6보다 작은 사

건을 B라 하면

$$P(A\cap B)=\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{1}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$$
$$=\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}$$

따라서, 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}}{\frac{1}{10}}=\frac{5}{9}$$

답 ⑤

27.

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

ㄱ.

$$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

에서

$ax+by=x,\ \ cx+dy=0$

임의의 실수 x, y에 대하여 성립하므로

$a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=0$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$$ <참>

ㄴ.

$$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

에서

$ax+by=-y,\ \ cx+dy=x$

임의의 실수 x, y에 대하여 성립하므로

$a=0,\ b=-1,\ c=1,\ d=0$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$이므로

$$A^3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\neq A$$

<거짓>

ㄷ. $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

에서

$ax+by=-x,\ \ cx+dy=-y$

임의의 실수 x, y에 대하여 성립하므로

$a=-1,\ b=0,\ c=0,\ d=-1$

따라서 $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$$A^{-1}=\frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=A$$

<참>

답 ③

28.

$a_n=3+(-1)^n$에서

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=4,\ \cdots$

$P_1(2\cos\frac{2\pi}{3}, 2\sin\frac{2\pi}{3})$ 즉, $(-1, \sqrt{3})$

$P_2(4\cos\frac{4\pi}{3}, 4\sin\frac{4\pi}{3})$ 즉, $(-2, -2\sqrt{3})$

$P_3(2\cos\frac{6\pi}{3}, 2\sin\frac{6\pi}{3})$ 즉, $(2, 0)$

$P_4(4\cos\frac{8\pi}{3}, 4\sin\frac{8\pi}{3})$ 즉, $(-2, 2\sqrt{3})$

$P_5(2\cos\frac{10\pi}{3}, 2\sin\frac{10\pi}{3})$ 즉, $(-1, -\sqrt{3})$

$P_6(4\cos\frac{12\pi}{3}, 4\sin\frac{12\pi}{3})$ 즉, $(4, 0)$

$P_7(2\cos\frac{14\pi}{3}, 2\sin\frac{14\pi}{3})$ 즉, $(-1, \sqrt{3})$

……

$2009=6\times334+5$이므로

점 P_{2009}와 같은 점은 P_5이다.

답 ⑤

29.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$=nx^2-\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$=n\left(x-\frac{n+1}{2n}\right)^2$$

$$+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}-\frac{(n+1)^2}{4n}$$

따라서 주어진 이차함수의 최솟값은

$$a_n=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12n}$$

$$=\frac{n^2-1}{12n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{12n^2}=\frac{1}{12}$$

답 ①

30.

$$P(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)+{}_3C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$=3\times\frac{3}{64}+\frac{1}{64}=\frac{5}{32}$$

$$\therefore\ p+q=37$$

답 37