2009학년도 9월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$2^{2\log_3 9}=2^{4\log_3 3}=2^4=16$

답 ②

2.

$A(2A^{-1}+3E)=2AA^{-1}+3A$

$=2E+3A$

$=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&6\\15&-12\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}11&6\\15&-10\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은

$11+6+15+(-10)=22$

답 ①

3. $x\to -3$ 일 때 (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to -3}(\sqrt{x^2-x-3}+ax)$

$=\sqrt{(-3)^2-(-3)-3}-3a$

$=3-3a=0$

$\therefore a=1$

$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x^2-x-3}+x)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$

$=\lim_{x\to -3}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}$

$=\frac{-1}{\sqrt{(-3)^2-(-3)-3}-(-3)}=-\frac{1}{6}$

즉, $b=-\frac{1}{6}$ 이므로

$a+b=\frac{5}{6}$

답 ⑤

4.

(i) $\frac{(x-6)(x-a)}{x-1}\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-6)(x-a)(x-1)\geq 0$ (단, $x\neq 1$)

$\Leftrightarrow$ $a\leq x<1$ 또는 $x\geq 6$ ($\because$ $a<0$)

(ii) $\frac{x}{(x-a)(x-10)}\leq 0$

$\Leftrightarrow$ $x(x-a)(x-10)\leq 0$(단, $x\neq a$, $x\neq 10$)

$\Leftrightarrow$ $x<a$ 또는 $0\leq x<10$ ($\because$ $a<0$)

(i), (ii)에서 주어진 두 부등식을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$0\leq x<1$ 또는 $6\leq x<10$

따라서 구하는 정수 x는 0, 6, 7, 8, 9의 5개이다.

답 ⑤

5.

조사 대상인 1000명 중 혈액형이 B형인 학생의 수는

150+ 6+ 80+ 4=240(명)

이 중 혈액형이 B형이고 Rh^+형의 남학생의 수는

150(명)

따라서 구하는 확률은

$\frac{150}{240}=\frac{5}{8}$

답 ④

6.

주어진 각각의 그래프에서

ㄱ. $f(-2)f(0)=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to -1+0}f(x-1)f(x+1)=1\cdot(-1)=-1$

$\lim_{x\to -1-0}f(x-1)f(x+1)=1\cdot 1=1$

$\lim_{x\to -1+0}f(x-1)f(x+1)$

$\neq \lim_{x\to -1-0}f(x-1)f(x+1)$

$\lim_{x\to -1}f(x-1)f(x+1)$이 존재하지 않으므로 $y=f(x-1)f(x+1)$은 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(-2)f(0)=0\times(-1)=0$

$\lim_{x\to -1+0}f(x-1)f(x+1)=0\cdot 1=0$

$\lim_{x\to -1-0}f(x-1)f(x+1)=0\cdot 1=0$

$\therefore$ $\lim_{x\to -1}f(x-1)f(x+1)=f(-2)f(0)=0$

따라서 $y=f(x-1)f(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. $y=f(x)$는 $x=-2$에서 연속이고 $x=0$에서 연속이므로 $y=f(x-1)$와 $y=f(x+1)$은 각각 $x=-1$에서 연속이다. 따라서 연속함수의 성질에 의해 $y=f(x-1)f(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

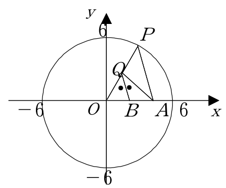
따라서 $y=f(x-1)f(x+1)$이 $x=-1$에서 연속이 되는 경우는 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

7.

오른쪽 그림과 같이 선분 O_1O_2의 연장선 위에 O_3를 잡고 반지름의 길이가 1인 그려 원 O_1과 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 하자.

이때, $\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1Q_1}$인 점 Q_1을 잡고 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q_1}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$

$=\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q_1}$

$=|\overrightarrow{O_1P}||\overrightarrow{O_1Q_1}|\cos\theta$

$=\cos\theta$ -----㉠

이 때, 오른쪽 그림에서 네 삼각형 O_1O_2A, O_1BO_2, $O_1A_1O_3$, $O_1O_3B_1$가 정삼각형이므로

$\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{5}{3}\pi$

따라서, ㉠은 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 최대값 $\frac{1}{2}$, $\theta=\pi$일 때, 최소값 -1을 가지므로

$M+m=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

답 ②

8.

$\overline{AP}//\overline{BQ}$이므로

$\angle AQB=\angle QAP$

$\angle OQB=\angle QPA$

따라서,

$\angle QAP=\angle QPA$

이므로

삼각형 QAP는 $\overline{QA}=\overline{QP}$인 이등변삼각형이고,

$\overline{OQ}+\overline{QB}=\overline{OQ}+\overline{QP}=\overline{OP}=6$

따라서, 점 Q는 두 점 O, Q에 이르는 거리의 합이 6으로 일정하다.

점 Q의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{OQ}+\overline{QA}=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6$

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-8x+16+y^2=36-12\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+5$

양변을 제곱하면

$9x^2+9y^2=4x^2+20x+25$

$5(x-2)^2+9y^2=45$

따라서, 점 Q의 차취는

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (단, $y\neq0$)

이므로

$X\subset\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1\right\}$

답 ⑤

9.

두 구

$x^2+y^2+z^2=1$,

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$

의 중심을 각각 $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$라 하면

두 구의 중심 사이의 거리 d는

$d=\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$

이고, 두 구의 반지름의 길이가 각각 $r_1=1$, $r_2=2$이므로

$d=r_1+r_2$

따라서, 두 구는 외접한다.

조건을 만족하는 점 P의 자취는 선분 OA로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취 즉, 원을 나타낸다.

오른쪽 그림에서

$\overline{OR}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt5$

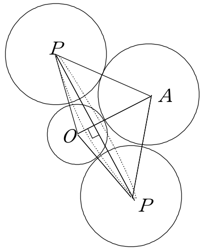
이므로

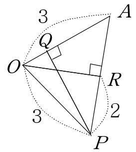
$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt5=\frac{1}{2}\times3\times\overline{PQ}$

에서 $\overline{PQ}=\frac{4}{3}\sqrt5$

따라서, 점 P의 자취는 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}\sqrt5$인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$2\pi\times\frac{4}{3}\sqrt5=\frac{8\sqrt5}{3}\pi$





답 ⑤

10.

(ⅰ) $x<1$일 때,

$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$

$=\int_{-1}^{x}(t-1)(-1)dt$

$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{x}$

$=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{2}$

(ⅱ) $x\geq1$일 때,

$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$

$=\int_{-1}^{1}(t-1)(-1)dt+\int_{1}^{x}(t-1)(-t+2)dt$

$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_{1}^{x}$

$=-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{17}{6}$

ㄱ. 구간 (1, 2)에서

$g'(x)=-x^2+3x-2=-(x-1)(x-2)$에서

$g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가한다. <참>

ㄴ.

$\lim_{x\to1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$,

$\lim_{x\to1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$

이므로 $x=1$에서 미분가능하다. <참>

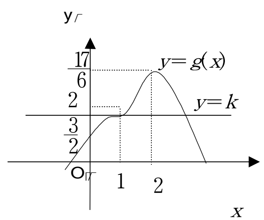
ㄷ. $x<1$일 때, $g'(x)=-x+1$

$x>1$일 때, $g'(x)=-(x-1)(x-2)$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.

따라서 방정식 $g(x)=k$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 k가 존재하지 않는다.

<거짓>



답 ③

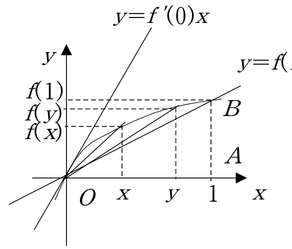
11.

조건(나)에서 $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여

$0<xf(y)<yf(x)$

이므로 $0<\frac{f(y)}{y}<\frac{f(x)}{x}$이고

$f(0)=0$을 동시에 만족하는 다항함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



주어진 그림에서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}f(1)$이므로

$y=k\frac{1}{2}f(1)<\int_0^1 f(x)dx$

$\therefore\ f(1)<2\int_0^1 f(x)dx$ 즉, $B<C$

한편, 원점 O을 지나는 접선의 방정식은

$y=f'(0)x$

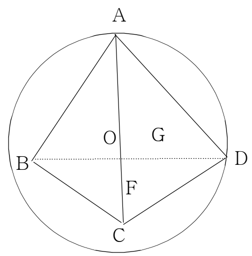
직선 $y=f'(0)x$와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}f'(0)$이고 주어진 그림에서 $\frac{1}{2}f'(0)>\int_0^1 f(x)dx$

$\therefore\ f'(0)>2\int_0^1 f(x)dx$ 즉, $A>C$

$\therefore\ B<C<A$

답 ④

12.



2009학년도 9월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

ㄱ. 직선 AF와 직선 BG는 점 O에서 만난다. (참)

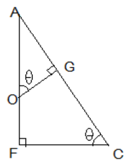
ㄴ. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$이다.

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$보다 작다.

그런데, 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 정삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$이므로정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$보다 작다.

(참)

ㄷ. 오른쪽 그림에서 삼각형 AFC와 삼각형 AGO는 닮음꼴이다.



그런데, ∠ACF는 정사면체의 이웃한 두 면이 이루는 각의 크기와 같고, ∠ACF=∠AOG이므로

$$\cos\Theta = \cos(\angle ACF) = \frac{1}{3} \quad (참)$$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄱ. 선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 F는 선분 BM 위에 있고, 점 G는 선분 AM 위에 있다.

따라서 5개의 점 A, B, F, G, M은 모두 한 평면 위에 있다.

따라서 직선 AF와 직선 BG는 꼬인 위치에 있지 않다.

답 ④

13. 확률밀도함수 $f(x)$ 가 $f(x)=f(100-x)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=50$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 평균 $m=50$ 이고 표본평균 $\overline{X}$ 는 평균이 50 이고 표준편차가 $\frac{10}{\sqrt{25}}=2$ 인 정규분포를 따른다.

$\therefore P(44\le\overline{X}\le 48)$

$=P\left(\frac{44-50}{2}\le Z\le\frac{48-50}{2}\right)$

$=P(-3\le Z\le -1)$

한편 주어진 그래프에서 구간별 확률은

$P(-1\le Z\le 1)=0.6826$

$P(-3\le Z\le 3)=0.9974$

이므로

$P(-3\le Z\le -1)$

$=P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1)$

$=\frac{0.9974}{2}-\frac{0.6826}{2}=0.1574$

답 ②

14.

처음 빵의 개당 무게와 가격을 각각 Ag, B원

이라 하자.

1번 시행 후 개당 무게는 $0.9A$g이므로

n번 시행 수 개당 무게는 $(0.9)^nA$g

처음 빵의 1g당 가격은 $\frac{B}{A}$ 원

n번 시행 후 1g당 가격은 $\frac{B}{(0.9)^nA}$ 원

$\frac{B}{(0.9)^nA}\ge\frac{3}{2}\times\frac{B}{A}$ 에서

$(0.9)^{-n}\ge\frac{3}{2}$

$-n\log\frac{9}{10}\ge\log 3-\log 2$

$n(1-2\log 3)\ge\log 3-\log 2$

$n\ge\frac{0.4771-0.3010}{1-2\times0.4771}=\frac{0.1761}{0.0458}=3.8\times\times\times$

따라서, 구하는 정수 n의 최소값은 4이다.

답 ②

15.

ㄱ. $f(x)$의 역함수를 구하면 $x=2^{y-2}+1$ 에서

$2^{y-2}=x-1$

$y-2=\log_2(x-1)$

$\therefore\ y=\log_2(x-1)+2$

따라서, $f^{-1}(x)=\log_2(x-1)+2$이고

$g(x)=f^{-1}(x)$

ㄱ. $f^{-1}(5)=\log_2(5-1)+2=4$이므로

$f^{-1}(5)\{g(5)+1\}$

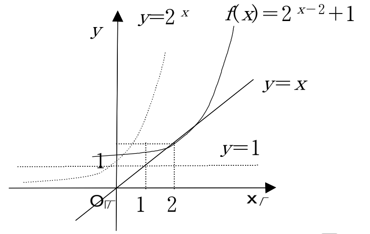
$=f^{-1}(5)\{f^{-1}(5)+1\}$

$=4(4+1)=20$ <참>

ㄴ. $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. <참>

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 그러므로 $y=2^x$의 그래프 위의 점 $(0, 1)$은 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 2)$로 평행이동한다. 이 때, 점 $(2, 2)$는 직선 $y=x$위의 점이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$의 그래프는 만난다. 그러므로 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프

는 만난다. <거짓>



답 ③

16.

$B=A-\frac{p+q}{2}E,\ k=\left[\frac{p-q}{2}\right]$라 하면

$B-kE=A-pE$이고 $B+kE=A-qE$이므로 $B-kE$와 $B+kE$는 모두 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$라 하면

$B-kE=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k\end{pmatrix}$

는 역행렬을 갖지 않으므로

$(a-k)(d-k)-bc=ad-k(a+d)+k^2-bc$

$=0$

$k\ne0$이므로 $a+d=[\ 0\ ]$, $ad-bc=-k^2$이다. 그런데

$B^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$

$=\frac{1}{k^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$($\because\ a+d=0,$ $ad-bc=-k^2$)

$=\frac{1}{k^2}[\ B\ ]$

이므로

$A^2-(p+q)A+pqE=(A-pE)(A-qE)$
$=O$
가 성립한다.

답 ③

17.
사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하자.
이 때, $\overline{AB_1}=\frac{1}{2}+\frac{a}{2}$, $\overline{B_1C_1}=a$, $\overline{AC_1}=1$이므로 직각삼각형 AB_1C_1에서

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)^2+a^2=1^2$$
$$\frac{5}{4}a^2+\frac{a}{2}-\frac{3}{4}=0$$
$$5a^2+2a-3=(5a-3)(a+1)=0$$
$$\therefore\ a=\frac{3}{5}\ (\because\ a>0)$$

따라서 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{5}$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열임을 알 수 있다.
따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{25}$, 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

답 ②

18.
$f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x-3)(x+1)$
이므로 $f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=3$
이 때, $x=-1$에서 극대이므로 구간 $[-2,0]$에서 $f(x)$의 최댓값은
$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+8$
$=13$

답 13

19.
$6.15=0.67\log(0.37E_1)+1.46\cdots$ ㉠
$5.48=0.67\log(0.37E_2)+1.46\cdots$ ㉡
㉠-㉡에서
$0.67=0.67\{\log(0.37E_1)-\log(0.37E_2)\}$
$0.67=0.67\log\frac{E_1}{E_2}$, $1=\log\frac{E_1}{E_2}$
$\therefore\ \frac{E_1}{E_2}=10$

답 10

20.
접선 l 의 방정식은
$-6x-2y=32$, $3x+y=-16\cdots$ ㉠
원점을 지나면서 ㉠과 수직인 직선의 방정식은
$-x+3y=0$, $x-3y=0\cdots$ ㉡
㉠,㉡에서 $H(-\frac{24}{5},-\frac{8}{5})$
또한, 쌍곡선 $x^2-y^2=32$와 ㉡의 교점은 $Q(6,2)$ 이다.
$\therefore\ \overline{OH}\cdot\overline{OQ}$
$=\sqrt{(-\frac{24}{5})^2+(-\frac{8}{5})^2}\times\sqrt{6^2+2^2}$
$=\frac{8\sqrt{10}}{5}\times2\sqrt{10}=32$

답 32

21.
A, B 공장에서 1시간에 생산하는 자동차의 대수를 각각 a, b라 하자.
A공장과 B공장을 동시에 가동하여 50대를 생산하는 데 6시간이 걸리므로

$$\frac{50}{a+b}=6\ \cdots\ ㉠$$

한편, A공장만 가동하여 50대를 생산하는데 걸리는 시간은 $\frac{50}{a}$이므로 B공장만 가동하여 50대를 생산하는데 걸리는 시간은

$$\frac{50}{b}=\frac{50}{a}+5$$
$$\therefore\ \frac{10}{b}=\frac{10}{a}+1\ \cdots\ ㉡$$

㉠에서 $a+b=\frac{25}{3}$이므로

$$b=\frac{25}{3}-a=\frac{25-3a}{3}$$

를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$\frac{30}{25-3a}-\frac{10}{a}=1$$
$$\frac{30a-10(25-3a)}{a(25-3a)}=1$$
$$60a-250=-3a^2+25a$$
$$(\text{단, } a\neq0,\ a\neq\frac{25}{3})$$
$$3a^2+35a-250=0$$
$$(3a+50)(a-5)=0$$
$$\therefore\ a=5\ (\because\ a>0)$$

따라서 A공장만 가동하여 자동차 50대를 생산하는 데 걸리는 시간은

$$x=\frac{50}{a}=10$$

답 10

22.
자연수 n에 대하여 $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이 되는 k는

$$(n-1)+\frac{1}{2}\le\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$$
$$n-\frac{1}{2}\le\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$n^2-n+\frac{1}{4}\le k<n^2+n+\frac{1}{4}$$

이 조건을 만족하는 자연수 k는 n^2-n+1부터 n^2+n까지의 수이므로

$$a_n=(n^2+n)-(n^2-n+1)+1$$
$$=2n$$

따라서

$$\sum_{i=1}^{10}a_i=\sum_{i=1}^{10}2i$$
$$=2\times\frac{10\times11}{2}=110$$

답 110

23.
할아버지, 할머니가 앉는 열과 아버지,어머니가 앉는 열을 정하는 경우의 수는
2(가지)
그 각각에 대하여 아들과 딸이 앉는 열을 정하는 경우의 수는
2(가지)
1열에서 세 사람이 앉을 때, 특정한 2명이 이웃하도록 앉는 경우의 수는
$2!\times2!=4$(가지)

2열에서 세 사람이 앉을 때, 특정한 2명이 이웃하도록 앉는 경우의 수는

$2!\times2!=4$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$2\times2\times4\times4=64$(가지)

답 64

24. $A_1(1,0)$, $B_1(0,1)$, $C_1(1,1)$ 에서

$a_1=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $b_1=3$

$\overline{A_2B_2}$ 의 중점이 $C_1(1,1)$ 이므로

$A_2(2,0)$, $B_2(0,2)$, $C_2(2,2)$

$a_2=2\times2\times\frac{1}{2}=2$, $b_2=6$

$\overline{A_3B_3}$ 의 중점이 $C_2(2,2)$ 이므로

$A_3(2^2,0)$, $B_2(0,2^2)$, $C_2(2^2,2^2)$

$a_3=2^2\times2^2\times\frac{1}{2}=8$, $b_3=12$

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\cdot4^{n-1}$, $b_n=3\cdot2^{n-1}$

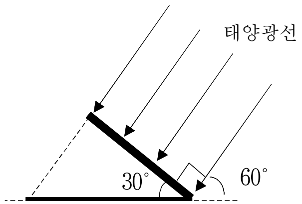
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^nb_n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}\cdot3}{2^{2n-3}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{2n-1}\cdot3}{2^{2n}}}{\frac{2^{2n-3}}{2^{2n}}+\frac{2^n}{2^{2n}}}$$

$$=\frac{3\cdot2^{-1}}{2^{-3}}=12$$

답 12

25.



태양광선이 위의 그림처럼 판에 수직으로 비춰질 때 즉, 지면과 판이 이루는 각의 크기가 30° 이면 그림자의 넓이 S가 최대가 된다.

판의 넓이는 $4^2-\pi=16-\pi$이므로

$$S=\frac{16-\pi}{\cos30^\circ}=\frac{16-\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(32-2\pi)}{3}$$

$\therefore$ $a=32$, $b=-2$

$\therefore$ $a+b=32-2=30$

답 30

미분과 적분

26.

$\sin^2\frac{\Theta}{2}=\frac{1}{3}$ 이므로

$\frac{1-\cos\Theta}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $\cos\Theta=\frac{1}{3}$

$0<\Theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin\Theta=\sqrt{1-\cos^2\Theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\tan\Theta=2\sqrt{2}$이므로

$\tan2\Theta=\frac{2\tan\Theta}{1-\tan^2\Theta}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

답 ①

27.

$y=\cos^nx$

$y'=-n\cos^{n-1}x\sin x$

$y''=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2x-n\cos^{n-1}x\cos x$

$=n(n-1)\cos^{n-2}x(1-\cos^2x)-n\cos^{n-1}x\cos x$

$=n(n-1)\cos^{n-2}x-n(n-1)\cos^nx-n\cos^nx$

$=n(n-1)\cos^{n-2}x-n^2\cos^nx$

$=\cos^{n-2}x(n^2-n-n^2\cos^2x)$

$=\cos^{n-2}x(n^2\sin^2x-n)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x\neq0$ 이므로

$y''=0$ 에서 $n^2\sin^2x-n=0$, $\sin^2x=\frac{1}{n}$

꼭지점의 좌표를 (b_n, a_n)이라 하면

$\sin^2b_n=\frac{1}{n}$ 이므로

$a_n=\cos^nb_n=(\cos^2b_n)^{\frac{n}{2}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

답 ③

28.

곡선과 직선의 교점의 좌표를 구한다.

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$에서

$xe^{x^2}=\frac{2}{3}xe^{x^2}+\frac{2}{3}x$, $\frac{1}{3}x(e^{x^2}-2)=0$

$x=0$ 또는 $e^{x^2}-2=0$

$e^{x^2}=2$에서 $x^2=\ln2$ $\therefore$ $x=\pm\sqrt{\ln2}$

따라서, 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^{\sqrt{\ln2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\ln2}}\frac{4}{3}xdx-\int_0^{\sqrt{\ln2}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{\ln2}}-\left[\ln(e^{x^2}+1)\right]_0^{\sqrt{\ln2}}$$

$$=\frac{2}{3}\ln2-(\ln3-\ln2)$$

$$=\frac{5}{3}\ln2-\ln3$$

답 ①

29.

ㄱ. $1<a<b$이고 $x>1$이면 $1<a^x<b^x$이고

$0<\log_b x<\log_a x$이므로

$a^x+\log_b x<b^x+\log_a x$

$f(x)=\dfrac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}>1$ <참>

ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}a^x=\lim\limits_{x\to\infty}b^x=0$이고

$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=\lim\limits_{x\to\infty}\log_b x=-\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\log_a x}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\frac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}$$

$$=\frac{1}{\log_b a}=\log_a b \text{ <거짓>}$$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0+}a^x=\lim\limits_{x\to0+}b^x=1$ 이고 $x\to0+$일 때, $\log_a x$, $\log_b x$는 ∞ 또는 $-\infty$로 발산하므로 ㄴ과 같은 방법으로 계산하면

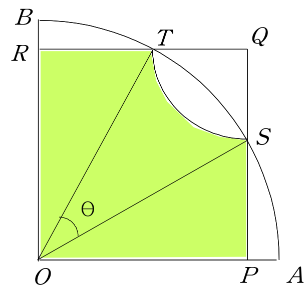
$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{b^x}{\log_b x}+\dfrac{\frac{\log_b x}{\log_b a}}{\log_b x}}{\dfrac{a^x}{\log_b x}+1}$$

$$=\log_a b \text{ <참>}$$

답 ③

30.



$\angle SOT=\theta$이므로

$\angle SOP=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=t$($0\le t\le\frac{\pi}{4}$)로 놓으면

$\overline{OP}=\cos t$, $\overline{ST}=\sin t$이므로

$D=\cos^2 t-(\cos t-\sin t)^2\frac{\pi}{4}$

$=\cos^2 t-(1-2\sin t\cos t)\frac{\pi}{4}$

$=\cos^2 t-(1-\sin 2t)\frac{\pi}{4}$

$D'=-2\cos t\sin t+\frac{\pi}{4}\cdot 2\cos 2t$

$=-\sin 2t+\frac{\pi}{2}\cos 2t=0$

즉, $\tan 2t=\frac{\pi}{2}$ ($0\le t\le\frac{\pi}{4}$)를 만족하는 t에 대하여 D는 최댓값을 갖는다.

$\tan 2t=\tan 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$=\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{2}{\pi}$

$\therefore\ 10\pi\tan\theta=10\pi\times\frac{2}{\pi}=20$

답 20

확률과 통계

26.

$\mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$ 이다.

그런데,

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

에서

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(B)$

$=\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

이고,

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$ 이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

다른 풀이

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

	P(A)	P(A^C)	계
P(B)			$\frac{1}{4}$
P(B^C)		$1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$	
계			1

위의 표에서 다음을 알 수 있다.

	P(A)	P(A^C)	계
P(B)			$\frac{1}{4}$
P(B^C)	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$
계			1

$\therefore\ \mathrm{P}(A|B^C)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

답 ①

27.

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)$

$+P(X=1)+P(X=2)=1$

이므로

$(k+\frac{2}{9})+(k+\frac{1}{9})+k+(k+\frac{1}{9})$

$+(k+\frac{2}{9})$

$=5k+\frac{6}{9}=1,\ 5k=\frac{1}{3}$

$\therefore\ k=\frac{1}{15}$

답 ①

28.

확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, $\sqrt{3}$, 2 이므로 확률분포표를 만들면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	합
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore\ E(X)=1\times\frac{1}{3}+\sqrt{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

답 ④

29.

ㄱ. $E(\overline{X_A})=m_1$, $E(\overline{X_B})=m_2$이므로

$m_1=m_2$이면 $E(\overline{X_A})=E(\overline{X_B})$이다. (참)

ㄴ. 표본평균 $\overline{X_B}$의 표준편차는 $\dfrac{\frac{\sigma}{2}}{\sqrt{n_2}}$ 즉,

$\dfrac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}\left(\neq\frac{\sigma}{2}\right)$이다.

따라서 $\overline{X_B}$는 정규분포

$N\left(m_2,\ \left(\dfrac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다. (거짓)

ㄷ. m_1에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 폭은

$$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$$

이고, m_2에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 폭은

$$d-c=2\times1.96\times\frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}}$$

따라서 $n_1=4n_2$이면

$$b-a=d-c$$

이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

30.

자료 A의 최빈값은 26

자료 B의 중앙값은

$$\frac{20+c+30+c}{2}=25+c$$

$\therefore\ 26=25+c$

$\therefore\ c=1$

자료 A의 중앙값은 30

자료 B의 평균은

$$\frac{10+20\times4+30\times3+40\times2+3a+2b+4c}{10}$$

$$=\frac{264+3a+2b}{10}$$

$$\therefore\ 30=\frac{264+3a+2b}{10}$$

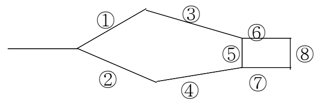
$\therefore\ 3a+2b=36$

답 36

이산수학

26.

주어진 그래프를 꼭지점 c의 위치를 바꾸어 다시 그리면 다음과 같다.



위의 그래프에서 ① ~④ 중 1개의 변을 제거하고 그 각각에 대하여 ⑤ ~⑧ 중에서 1개의 변을 제거하면 $4\times4=16$ 가지의 생성수형도를 만들 수 있다. 또 변⑤ ~⑧ 중에서 두 변을 제거하여 생성수형도를 만들 수 있는 경우가 3가지 있으므로

주어진 그래프의 생성수형도의 개수는

$16+3=19$ (개)이다.

답 ①

27.

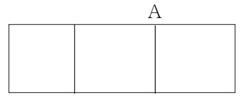
선택하는 사과주스 , 포도주스, 감귤주스 병의 개수를 각각 x, y, z 라 하면 각 종류의 주스는 적어도 한 병 이상씩 선택해야 하므로 $x+y+z=5$ 를 만족하는 정수 x, y, z 를 구한다. 따라서 구하는 경우의 수는 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 방법의 수이므로

$${}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2}=21$$

답 ③

28.

주어진 그래프를 꼭짓점을 이동하여 다시 그리면 다음과 같다.



따라서 위의 그래프는 평면그래프이고 홀수점이 4개이므로 변을 2개 추가하면 오일러회로가 있는 그래프로 만들 수 있다. 그러나 꼭짓점 A에서 출발하는 해밀턴회로는 2개 있다.

따라서 옳게 설명한 사람은 서진과 은지이다.

답 ④

29.

$a_1=3\times5-3\times1^2=12$

$a_2=3\times5\times2^2-3\times2^2=12\cdot2^2$

$a_3=3\times5\times3^2-3\times3^2=12\cdot3^2$

$\vdots$

$a_n=3\times5\times n^2-3\times n^2=12\cdot n^2$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}12k^2$$

$$=12\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=2n(n+1)(2n+1)=4620$$

$$n(n+1)(2n+1)=2310=10\times11\times21$$

$\therefore\ n=10$

답 ①

30.

물품의 가치의 합을 되도록 크게 하려면 정민이는 침낭, 여벌 옷, 비상식량, 비상약품, 카메라를 선택해야한다.

이 때 물품 가치의 합은

$8+5+4+3+3=23$ 이고 누적무게는

$2+2.5+1.6+1+0.5=7.6(kg)$ 이다.

$\therefore\ 10a=10\times 7.6=76$

답 76