2008학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

수리 영역

"가"형 정답

1	④	2	①	3	④	4	③	5	②
6	⑤	7	②	8	④	9	③	10	④
11	⑤	12	①	13	③	14	②	15	④
16	②	17	⑤	18	16	19	12	20	18
21	21	22	14	23	10	24	20	25	27

해설

1. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$(\log_2 16)\times\sqrt[3]{64}=4\times2^{\frac{6}{3}}=16$

2. [출제의도] 분수방정식의 근 구하기

양변에 $x(x+1)$을 곱하여 정리하면

$2x^2-x-1=0$에서 $x=1$ 또는 $-\dfrac{1}{2}$

따라서 모든 근의 합은 $\dfrac{1}{2}$

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+4}-2}=\lim_{t\to0}\frac{t^2\left(\sqrt{t^2+4}+2\right)}{t^2}=4$$

4. [출제의도] 그래프를 이용하여 무리방정식의 근의 개수 구하기

$f(x)-1=\sqrt{3f(x)-5}$ 의 양변을 제곱하여 풀면
$f(x)=2$ 또는 $f(x)=3$
$f(x)=2$ 를 만족하는 근 2개
$f(x)=3$ 을 만족하는 근 3개
따라서 근의 개수는 5개

5. [출제의도] 연속함수와 주기함수를 활용하여 함수값 계산하기

ⅰ) $f(0)=f(4)$
$0=16+4a+b$
ⅱ) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=f(1)$
$3=1+a+b$
$a=-6,\ b=8$
$\therefore\ f(10)=f(2)=0$

6. [출제의도] 정적분의 정리 이해하기

조건Ⅰ의 식을 미분하면
$f(x)=2f(x)f'(x)$
$f'(x)=\dfrac{1}{2}\qquad\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x+C$
조건Ⅱ의 식에 대입하여 풀면 $C=25$
따라서 $f(0)=25$

7. [출제의도] 정규분포에서 확률 계산하기

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 5^2)$을 따르고
확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.
$\mathrm{P}(\overline{X}\geq201)=\mathrm{P}(Z\geq2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

8. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학외적 문제 해결하기

상품에 대해 긍정적인 평가를 할 사건을 A
그 사람이 남자인 사건을 B라 하면
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.6\times0.6}{0.6\times0.6+0.4\times0.5}=\frac{9}{14}$$

9. [출제의도] 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $A^k=\begin{pmatrix}m^k&0\\0&n^k\end{pmatrix}$이므로 직선은 $y=m^kx+n^k$ 이다. (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}m&0\\0&n\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재할 조건은
$mn\neq0$이므로 원점을 지나지 않는다. (참)

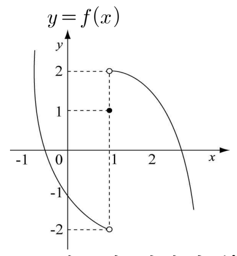
ㄷ. $A=\begin{pmatrix}m&0\\0&n\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{m}&0\\0&\frac{1}{n}\end{pmatrix}$ 이므로 두 직선의 기울기는 $m,\ \dfrac{1}{m}$이고 서로 수직이 아니다. (거짓)

10. [출제의도] 분수방정식을 이용한 수학외적 문제 해결하기

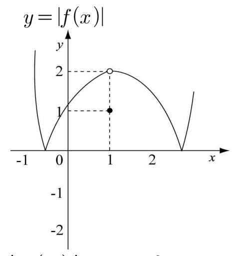
A의 속력을 v, 순레단이 나아가는 방향과 반대로 움직인 시간을 t_1, 같은 방향으로 움직인 시간을 t_2라 하면 $vt_1+4t_1=2$, $vt_2-4t_2=2$
전달자가 움직인 시간 (t_1+t_2)는 순레단이 움직인 시간과 같으므로 $\dfrac{2}{v+4}+\dfrac{2}{v-4}=\dfrac{2}{4}$이다.
$\therefore\quad v=4+4\sqrt{2}$

11. [출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$y=f(x)$



$y=|f(x)|$



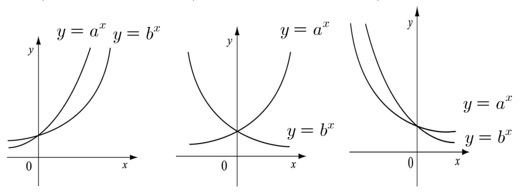
ㄱ. 그래프에 의하여 $\lim\limits_{x\to1}|f(x)|=2$ (참)
ㄴ. $\lim\limits_{x\to2+0}f(f(x))=\lim\limits_{t\to1-0}f(t)=-2$ (참)
ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$는 $f(x)=1$일 때 불연속점을 가지므로 $x=2,\ 1,\ 1-\sqrt{3}$ 에서 불연속이다. 따라서 3개 존재한다. (참)

12. [출제의도] 행렬을 이용한 연립방정식과 고차방정식의 수학내적문제 해결하기

행렬 $\begin{pmatrix}a^2+1&2a^2-3\\2&a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.
$a(a^2+1)-2(2a^2-3)=a^3-4a^2+a+6=0$
$\therefore\ a=-1,\ 2,\ 3$이다. $a=-1$일 때,
$X=\{(x,\ y)|y=2x\}$ 이므로 $X\cap Y=\phi$
$\therefore\ a=2,\ 3$이고 모든 a의 합은 5이다.

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

ⅰ) $a>b>1$ ⅱ) $a>1>b>0$ ⅲ) $1>a>b>0$



ㄱ. 위 그래프에서 양수 n에 대하여 항상
$a^n>b^n$ (참)
ㄴ. $1>a>b>0$일 때 $f(n)<g(-n)$ (거짓)
ㄷ. $f(n)=g(-n)$이면 $a^n=b^{-n}$이므로 $a=\dfrac{1}{b}$
$a^{\frac{1}{n}}=\left(\dfrac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=(b^{-1})^{\frac{1}{n}}=b^{-\frac{1}{n}}$ (참)

14. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 부등식의 귀납적 추론하기

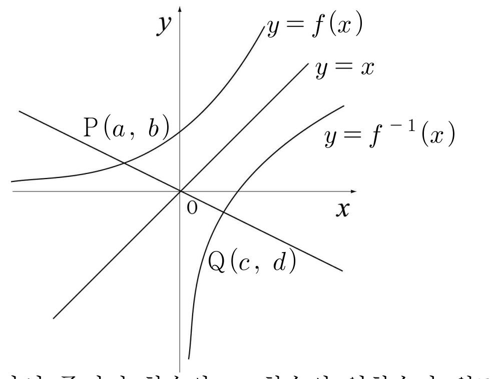
<증명>
(i) $n=2$일 때
(좌변)$=\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)=\dfrac{9}{4}$
(우변) $=3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k^3}\right)<3-\dfrac{1}{k}\ \cdots$ ㉡
㉡의 양변에 $1+\dfrac{1}{(k+1)^3}$ 를 곱하면
$\left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{k^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right)$
$<\left(3-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right)\ \cdots$ ㉢
㉢의 우변을 정리하면
(우변) $=3-\dfrac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}$
이 때, $\dfrac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}-\dfrac{1}{k+1}>0$
따라서 $\left(3-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right)<3-\dfrac{1}{k+1}$
그러므로 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

15. [출제의도] 역행렬과 역함수의 수학내적문제 해결하기

그림과 같이 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 원점을 지나는 직선과 교점이 생길 때, 이를 각각 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, 점 $\mathrm{Q}(c,\ d)$라 하면 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$가 성립하여 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.



따라서 주어진 함수와 그 함수의 역함수가 원점을 지나는 직선과 항상 교점을 갖지 않는 함수는 $y=\sqrt{x-1}$이다.

16. [출제의도] 확률의 연산을 이용하여 수학외적문제 해결하기

A학생이 이기는 경우는 세 가지
ⅰ) A:빨강-B:노랑 $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{25}$
ⅱ) A:노랑-B:파랑 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{25}$
ⅲ) A:노랑-B:노랑 → A:노랑-B:파랑
$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{4}\times1=\dfrac{3}{50}$
합의 법칙에 의하여 $\dfrac{4+24+3}{50}=\dfrac{31}{50}$

17. [출제의도] 증가함수의 성질 이해하기

ㄱ. 증가함수 (참)
ㄴ. $g(x)=f(x)-2x$라 하면 $g(x)$는 연속함수
$g(0)=f(0)>0$
$g(1)=f(1)-2<0$이므로 중간값의 정리에 의해 해가 적어도 한 개 존재한다. (참)
ㄷ. 증가함수 (참)

18. [출제의도] 도함수를 활용하여 극솟값 계산하기

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이므로
$x=2$에서 극솟값 $f(2)=16$을 가진다.

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 극값과 접선의 방정식의 성질 이해하기

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)^4+C$ 에서 $M=f(1)=C$

$f'(0)=-1,\ f'(2)=1$

$x=0$에서의 접선은 $y=-x+\frac{1}{4}+C$

$x=2$에서의 접선은 $y=(x-2)+\frac{1}{4}+C$

$-x+\frac{1}{4}+C=x-2+\frac{1}{4}+C$ 에서 $x=1$이므로

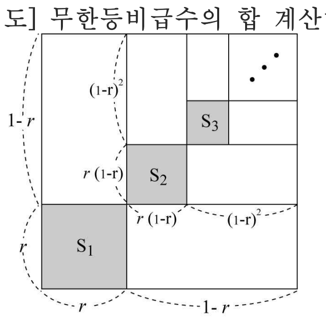
$N=C-\frac{3}{4}\quad \therefore 16(M-N)=12$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 수학내적문제 해결하기
t초 일 때
$\square DPBQ=\square ABCD-(\triangle APD+\triangle QCD)$
$=200+10t$
또한 $\square DPBQ=\frac{11}{20}\times\square ABCD$이므로
$200+10t=220$에서 $t=2$
$\triangle PBQ=\frac{1}{2}(20-2t)3t=30t-3t^2$
$\triangle PBQ$의 넓이의 순간변화율은 $30-6t$
따라서 $\triangle PBQ$ 넓이의 $t=2$일 때 순간변화율은 18

21. [출제의도] 같은 것이 있는 경우의 순열 계산하기
ⅰ) 1 개씩 7번 옮기는 경우 : 1
ⅱ) 1 개씩 5 번, 2 개씩 1 번 옮기는 경우 : $\frac{6!}{5!}=6$
ⅲ) 1 개씩 3 번, 2 개씩 2 번 옮기는 경우 : $\frac{5!}{3!2!}=10$
ⅳ) 1 개씩 1 번, 2 개씩 3 번 옮기는 경우 : $\frac{4!}{3!}=4$
$\therefore$ 21가지

22. [출제의도] 고차부등식과 분수부등식의 해 구하기
$A=\{x|2<x<4\}$이고
ⅰ) $a\leqq-1$ 이면 $B=\{x|x<a,x>-1\}$
$\therefore A\subset B$
ⅱ) $a>-1$ 이면 $B=\{x|x<-1,\ x>a\}$
$A\subset B$가 되려면 $-1<a\leqq 2$
$\therefore a\leqq 2$이므로 $7M=14$

23. [출제의도] 무한등비급수의 합 계산하기



$S_1=r^2,\ S_2=r^2(1-r)^2,\ S_3=r^2(1-r)^4\cdots$

$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{r^2}{1-(1-r)^2}=\frac{r}{2-r}=\frac{1}{7}$

$\therefore r=\frac{1}{4}$ 이므로 $m:n=r:1-r=1:3$

따라서 $m^2+n^2=10$

24. [출제의도] 회전체의 부피에 대한 수학외적문제 해결하기
컵의 바닥으로부터의 물의 높이가 1 일 때 공명주파수가 $\frac{a}{16}$ 이므로 공명주파수 $\frac{a}{8}$ 를 얻기 위해서 물의 높이는 3 이어야 한다. 더 부어야 하는 물의 양 $V=\pi\int_1^3 y\,dy=4\pi$

$\therefore\ \frac{5V}{\pi}=20$

25. [출제의도] 등비수열을 이용한 수학외적문제 해결하기
수열 $a,\ b,\ c$의 공비를 r이라고 하면
$b=ar,\ \ c=ar^2$
그러므로 $3^a,\ 9^b,\ 27^c$은 $3^a,\ 9^{ar},\ 27^{ar^2}$이고
두 수열의 공비가 같으므로

$\frac{9^{ar}}{3^a}=\frac{27^{ar^2}}{9^{ar}}=r$

즉, $3^{2ar-a}=3^{3ar^2-2ar}=r\quad\cdots$ ㉠
$2ar-a=3ar^2-2ar$
$a(3r^2-4r+1)=0$
$\therefore\ r=\frac{1}{3}\ \ (\because a>0,\ r\neq 1)\ \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=3$

$t_A=\frac{3^3}{3}=9,\ \ t_B=\frac{9^1}{1}=9,\ \ t_C=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}=9$

$\therefore\ t_A+t_B+t_C=27$

미분과 적분

26	④	27	①	28	⑤	29	②	30	10

해설

26. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{x(x-1)}{2x}}=-2$

27. [출제의도] 연속함수의 정의를 이해하기
$x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-a}{x-\frac{\pi}{2}}=b$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-a)=0$ 이므로 $a=1$

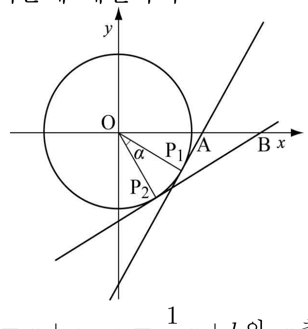
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=b$에서 $x-\frac{\pi}{2}=t$라 하면

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=0\quad\therefore b=0$

따라서 $a+b=1$

28. [출제의도] 원점대칭과 y축 대칭인 함수의 성질 이해하기
$h(x)=f(x)+xg(x)$ 에서
$h(-x)=f(-x)-xg(-x)$
$=-f(x)-xg(x)$
$=-(f(x)+xg(x))$
$=-h(x)$
ㄱ. $h(x)$는 원점 대칭이므로 $h(0)=0$ (참)
ㄴ. $h(-x)=-h(x)$을 미분하면
$-h'(-x)=-h'(x)$
$h'(-x)=h'(x)$ (참)
ㄷ. $h''(-x)=-h''(x)$ 이므로 $h''(x)$는 원점대칭, $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지면 $x=-1$에서 극솟값 -1을 가진다.
따라서 $h''(x)-x=0$는 적어도 3개의 실근을 가진다. (참)

29. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 수학내적문제 해결하기



두 직선 $y=x+a$, $y=\frac{1}{3}x+b$와 x축이 만나는 점을 각각 A, B라 하고 $\angle OAP_1=\theta_1$라 하면 $\tan\theta_1=1$이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 $\angle AOP_1=\frac{\pi}{4}$이다

같은 방법으로 $\angle OBP_2=\theta_2$, $\tan\theta_2=\frac{1}{3}$이고

$\overline{BP_2}=3r$이다. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$에 의해서

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{1}{2}$

30, [출제의도] 도함수를 활용하여 수학내적문제 해결하기
$\frac{dx}{dt}=2$ 이고 $10x=\sqrt{x}$ 에서 $x=\frac{1}{100}$
$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}$
$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{x=\frac{1}{100}}=10$

확률과 통계

26	③	27	①	28	②	29	③	30	142

해설

26. [출제의도] 자료의 분포와 특성 이해하기
$(\text{각 계급의 상대도수})=\frac{(\text{각 계급의 도수})}{(\text{전체도수})}$
4 시간 이상 5 시간 미만의 계급의 도수가 12 로 가장 크므로 상대도수가 가장 큰 계급의 계급값은 4.5

27. [출제의도] 이산확률분포의 평균과 분산 계산하기
$b=\frac{1}{2},\ E(X)=1+1+\frac{a}{4}=4,\ a=8$
$\therefore V(X)=4\cdot\frac{1}{2}+16\cdot\frac{1}{4}+64\cdot\frac{1}{4}-16=6$

28. [출제의도] 가중평균을 이용하여 수학외적 문제 해결하기
$m_A=\frac{3\times 5+3\times 5}{3+3}=\frac{30}{6}=5(\%)$
$m_B=\frac{2\times 3+4\times 6}{2+4}=\frac{30}{6}=5(\%)$
$m_C=\frac{1\times 3+2\times 7}{1+2}=\frac{17}{3}=5.\dot{6}(\%)$
$\therefore m_A=m_B<m_c$

29. [출제의도] 이항분포의 성질 이해하기
확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르고
$f(x)=\mathrm{P}(X\leqq 5x+50)=\mathrm{P}(X\leqq[5x+50])$
$=\sum_{n=0}^{[5x+50]}{}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
(단, $[5x+50]$은 $5x+50$을 넘지 않은 최대정수)
ㄱ. $V(X)=100\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=25$ (참)
ㄴ. $x_1\leqq x_2$이면 $[5x_1+50]\leqq[5x_2+50]$이므로
$f(x_1)=\sum_{n=0}^{[5x_1+50]}{}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
$\leqq\sum_{n=0}^{[5x_2+50]}{}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=f(x_2)$ (참)
ㄷ. $-10\leqq x\leqq 10$인 임의의 x에 대하여,
$f(-x)=\mathrm{P}(X\leqq-5x+50)$
$=\sum_{n=0}^{[-5x+50]}{}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$
$\geqq\sum_{n=[5x+50]+1}^{100}{}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

$f(x)+f(-x)\geqq$

$$\sum_{n=0}^{[5x+50]} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \sum_{n=[5x+50]+1}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 1$$ (거짓)

예를 들어

(i) $x=1$인 경우

$$f(-1)=\mathrm{P}(X \leqq 45)=\sum_{n=0}^{45} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \sum_{n=55}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$f(1)+f(-1) = \sum_{n=0}^{55} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \sum_{n=55}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} > 1$$

(ii) $x=0.9$인 경우

$$f(-0.9)=\mathrm{P}(X \leqq 45)=\sum_{n=0}^{45} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \sum_{n=55}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$f(0.9)+f(-0.9) = \sum_{n=0}^{54} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \sum_{n=55}^{100} {}_{100}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 1$$

30. [출제의도] 조건부 확률을 이용하여 수학외적문제 해결하기

A에서 B까지 운항하는 경우는 4가지 경우이다.

i) Ⅰ축 주엔진, Ⅱ축 주엔진: 0.9×0.9

ii) Ⅰ축 주엔진, Ⅱ축 보조엔진: $0.9\times0.1\times0.9$

iii) Ⅰ축 보조엔진, Ⅱ축 주엔진: $0.1\times0.9\times0.9$

iv) Ⅰ축 보조엔진, Ⅱ축 보조엔진 :$0.1\times0.9\times0.1\times0.9$

A에서 B까지 운항할 사건을 E라고 하면

$$\mathrm{P}(E)=0.9\times0.9+0.1\times0.9\times0.9\times2+0.1\times0.9\times0.1\times0.9 = (0.9)^2\{1+0.2+(0.1)^2\}$$

보조엔진이 사용되는 사건을 D라고 하면

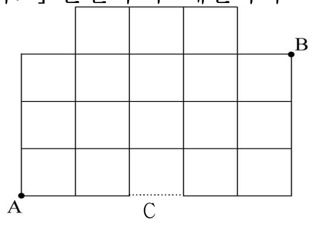
$$\mathrm{P}(D|E)=\frac{\mathrm{P}(D\cap E)}{\mathrm{P}(E)} = \frac{(0.9)^2\{0.2+(0.1)^2\}}{(0.9)^2\{1+0.2+(0.1)^2\}} = \frac{21}{121}$$

이산수학

26	①	27	⑤	28	③	29	④	30	192

해설

26. [출제의도] 순열의 수 계산하기



구하는 경우의 수는

(A 에서 B 까지 최단거리로 가는 경우의 수) - (A 에서 C 를 거쳐서 B 까지 최단거리로 가는 경우의 수) 이므로,

$$\frac{8!}{5!\times3!}-\frac{5!}{2!\times3!}=56-10=46$$

27. [출제의도] 비둘기집의 원리 이해하기

두 수의 합이 11이 되는 경우는

{1, 10},{2, 9},{3, 8},{4, 7},{5, 6} 의 5가지이다. 최대한 많이 꺼내면서 합이 11이 되지 않는 경우가 위의 5가지 경우에서 하나씩 꺼내는 경우 (예를 들면, {1, 2, 3, 4, 5}) 이므로 이보다 하나를 더 꺼내면 두 수의 합이 11이 되는 경우가 항상 존재한다.

따라서 적어도 6개의 공을 꺼내야 한다.

28. [출제의도] 그래프의 성질 이해하기

ㄱ. 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수를 모두 더하면 14 (참)

ㄴ. 모든 꼭짓점의 차수가 짝수가 아니므로 오일러 회로가 존재하지 않음 (거짓)

ㄷ. 수형도의 변의 개수는 꼭짓점의 개수보다 한 개 더 적으므로 3 개를 삭제 (참)

29. [출제의도] 수의 규칙성을 이용하여 수학외적문제 해결하기

33 의 배수가 되기 위해서는 3 의 배수도 되고 11 의 배수도 되어야 하므로

i) 3 의 배수가 될 조건 : $a+b$가 3 의 배수

$a+b$는 3, 6, 9, 12, 15, 18 이 될 수 있다.

ii) 11 의 배수가 될 조건:$-a+2-1+b-3+0$ 이 11 의 배수이다.

$-a+b=-9$, 2 이 될 수 있다.

위의 조건에서 a, b의 값이 될 수 있는 경우를 순서쌍으로 나타내면

$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (9,\ 0),\ (5,\ 7)$이므로,

ab의 최댓값은 35 이다.

30. [출제의도] 두 항 사이의 관계를 이용하여 수학내적문제 해결하기

$n=1$ 일 때 3 가지

$n=2$ 일 때 6 가지

$a_{n+1}=a_n\times2$

$a_n=3\times2^{n-1}$

따라서 $a_7=192$

"나"형 정답

1	④	2	②	3	⑤	4	④	5	①
6	④	7	⑤	8	④	9	③	10	⑤
11	②	12	①	13	③	14	②	15	④
16	②	17	④	18	30	19	10	20	136
21	21	22	420	23	10	24	74	25	27
26	①	27	③	28	⑤	29	②	30	19

해설

1. [출제의도] 지수와 로그 계산하기

$$(\log_2 16)\times\sqrt[3]{64}=4\times2^{\frac{6}{3}}=16$$

2. [출제의도] 행렬의 연산 계산하기

$$2X=B-3A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -10 & -2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}$$ ∴ 성분의 합은 -6

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1}=3$$

4. [출제의도] 등차수열의 항 구하기

$a_2=a_1+d=-1$

$a_1+2(a_1+2d)=0,\ 3a_1+4d=0$

$a_1=-4,\ d=3 \quad \therefore a_{10}=23$

5. [출제의도] 순열과 조합의 수 계산하기

${}_{n-1}\mathrm{P}_2+4={}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}$

${}_{n-1}\mathrm{P}_2+4={}_{n+1}\mathrm{C}_2$

$$(n-1)(n-2)+4=\frac{(n+1)n}{2}$$

$n^2-7n+12=0$

∴ n값의 합은 7

6. [출제의도] 상용로그의 가수 계산하기

$\log_2 x=5.2$이므로 $\dfrac{\log x}{\log 2}=5.2,\ \log x=1.56$

$$\log\frac{1}{x}=-\log x=\bar{2}.44,\ \therefore \log\frac{1}{x}\text{의 가수}=0.44$$

7. [출제의도] 로그의 연산법칙 이해하기

ㄱ. $4◎16=\log_4 16+\log_{16}4=\dfrac{5}{2}$ (참)

ㄴ. $a^k ◎ b^k=\log_{a^k}b^k+\log_{b^k}a^k=a◎b$ (참)

ㄷ. $a^b◎b^a=\log_{a^b}b^a+\log_{b^a}a^b$

$$=\frac{a}{b}\log_a b+\frac{b}{a}\log_b a$$

$$=\log_a b^{\frac{a}{b}}+\log_{b^{\frac{a}{b}}}a$$

$$=a◎b^{\frac{a}{b}}$$ (참)

8. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 수학외적문제 해결하기

상품에 대해 긍정적인 평가를 할 사건을 A 그 사람이 남자인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0.6\times0.6}{0.6\times0.6+0.4\times0.5}=\frac{9}{14}$$

9. [출제의도] 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $A^k=\begin{pmatrix}m^k & 0\\ 0 & n^k\end{pmatrix}$이므로 직선은 $y=m^kx+n^k$ 이다. (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재할 조건은 $mn\neq0$이므로 원점을 지나지 않는다. (참)

ㄷ. $A=\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & n\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{m} & 0\\ 0 & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$ 이므로 두 직선의 기울기는 $m,\ \dfrac{1}{m}$이고 서로 수직이 아니다. (거짓)

10. [출제의도] 독립사건의 확률구하기

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B))=\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)$$

$$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$$

11. [출제의도] 로그방정식의 해 구하기

$$(\log_3 x)(\log_4 y)=\frac{\log_2 x}{\log_2 3}\frac{\log_3 y}{\log_3 4},\ \log_2 x\log_3 y=-3$$

$\log_2 x+\log_3 y=2$이므로 $\log_2 x$와 $\log_3 y$를 두 근으로 하는 t에 관한 이차방정식은 $t^2-2t-3=0$

이를 풀면 $t=-1$ 또는 $t=3$

$a>1$이므로 $\log_2 x=3,\ \log_3 y=-1$이고

$x=a=8,\ y=b=\dfrac{1}{3} \quad \therefore 3ab=8$

12. [출제의도] 행렬을 이용한 연립방정식과 고차방정식의 수학내적문제 해결하기

행렬 $\begin{pmatrix}a^2+1 & 2a^2-3\\ 2 & a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$a(a^2+1)-2(2a^2-3)=a^3-4a^2+a+6=0$

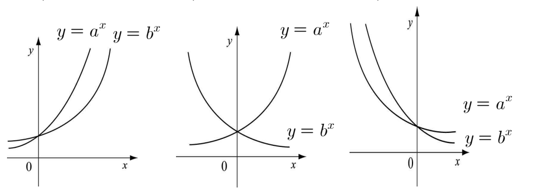
∴ $a=-1,\ 2,\ 3$이다. $a=-1$일 때,

$X=\{(x,\ y)|y=2x\}$이므로 $X\cap Y=\phi$

∴ $a=2,\ 3$이고 모든 a의 합은 5 이다.

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

i) $a>b>1$ ii) $a>1>b>0$ iii) $1>a>b>0$



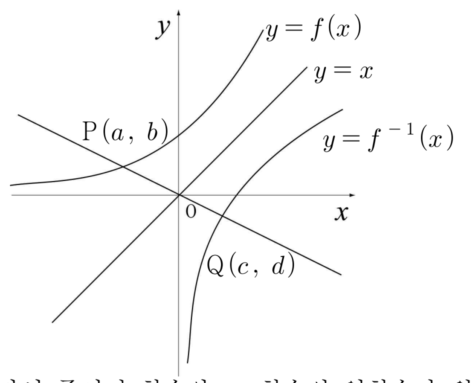
ㄱ. 위 그래프에서 양수 n에 대하여 항상
$a^n > b^n$ (참)
ㄴ. $1 > a > b > 0$일 때 $f(n) < g(-n)$ (거짓)
ㄷ. $f(n) = g(-n)$이면 $a^n = b^{-n}$이므로 $a = \frac{1}{b}$

$a^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = (b^{-1})^{\frac{1}{n}} = b^{-\frac{1}{n}}$ (참)

14. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 부등식의 귀납적 추론하기
<증명>
(i) $n=2$일 때
(좌변)$=\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{9}{4}$
(우변) $= 3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ 이므로 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면
$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)< 3-\frac{1}{k}$ ⋯ ㉡
㉡의 양변에 $1+\frac{1}{(k+1)^3}$ 를 곱하면
$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right)$
$< \left(3-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right)$ ⋯ ㉢
㉢의 우변을 정리하면
(우변) $= 3 - \frac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}$
이 때, $\frac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}-\frac{1}{k+1}>0$
따라서 $\left(3-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right)< 3-\frac{1}{k+1}$
그러므로 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

15. [출제의도] 역행렬과 역함수의 수학내적문제 해결하기
그림과 같이 함수 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 원점을 지나는 직선과 교점이 생길 때, 이를 각각 점 $\mathrm{P}(a, b)$, 점 $\mathrm{Q}(c, d)$라 하면 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$가 성립하여 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않는다.



따라서 주어진 함수와 그 함수의 역함수가 원점을 지나는 직선과 항상 교점을 갖지 않는 함수는 $y=\sqrt{x-1}$이다.

16. [출제의도] 확률의 연산을 이용하여 수학외적문제 해결하기
A학생이 이기는 경우는 세 가지
i) A:빨강-B:노랑 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$
ii) A:노랑-B:파랑 $\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$
iii) A:노랑-B:노랑 → A:노랑-B:파랑
$\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times 1=\frac{3}{50}$
합의 법칙에 의하여 $\frac{4+24+3}{50}=\frac{31}{50}$

17. [출제의도] 등비수열의 합 구하기
$\angle\mathrm{A_{10}OB}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{A_{10}OA}$
$\angle\mathrm{A_{10}OA}$
$=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^9$
$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$
$\therefore \angle\mathrm{A_{10}OB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)=\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$

18. [출제의도] 역행렬 계산하기
$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은 30

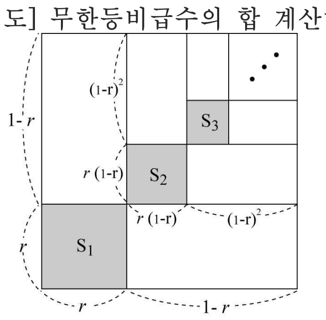
19. [출제의도] 지수 방정식의 해 구하기
방정식 $16^x-4^{x+3}+100=0$의 두 근을 α, β라 하고, $4^x=t(t>0)$라 치환하면 $4^\alpha, 4^\beta$은 방정식 $t^2-4^3t+100=0$의 두 근이다.
근과 계수와의 관계에 의해서 $4^\alpha 4^\beta=100$이다.
$4^{\alpha+\beta}=100$
$2^{2(\alpha+\beta)}=100$
$2^{\alpha+\beta}=10$

20. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기
1단계의 타일로 덮인 넓이 $a_1=1$
2단계의 타일로 덮인 넓이 $a_2=4$
3단계의 타일로 덮인 넓이 $a_3=10$
⋮
n단계의 타일로 덮인 넓이
$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3k=\frac{3}{2}n(n-1)+1$
10단계의 타일로 덮인 넓이 $a_{10}=136$

21. [출제의도] 같은 것이 있는 경우의 순열 계산하기
i) 1개씩 7번 옮기는 경우 : 1
ii) 1개씩 5번, 2개씩 1번 옮기는 경우 : $\frac{6!}{5!}=6$
iii) 1개씩 3번, 2개씩 2번 옮기는 경우 : $\frac{5!}{3!2!}=10$
iv) 1개씩 1번, 2개씩 3번 옮기는 경우 : $\frac{4!}{3!}=4$
∴ 21가지

22. [출제의도] 조합을 이용하여 수학외적문제 해결하기
8대 중에서 2대를 선택하는 방법의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2$
어른을 두 팀으로 나누는 방법의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2=3$
어린이를 두 팀으로 나누는 방법의 수는
${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_4\times{}_1\mathrm{C}_1=25$
두 개의 팀이 두 대의 차량에 나누어 탑승하는 방법의 수는 $2!$
$n={}_8\mathrm{C}_2\times3\times25\times2!=4200$
$\therefore \frac{n}{10}=420$

23. [출제의도] 무한등비급수의 합 계산하기



색칠한 부분의 넓이를 차례대로 $S_k(k=1,2,3\cdots)$이라고 하면
$S_1=r^2$, $S_2=r^2(1-r)^2$, $S_3=r^2(1-r)^4\cdots$
$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{r^2}{1-(1-r)^2}=\frac{r}{2-r}=\frac{1}{7}$
$\therefore r=\frac{1}{4}$ 이므로 $m:n=r:1-r=1:3$
따라서 $m^2+n^2=10$

24. [출제의도] 로그의 성질 이해하기
$\log_2 1 < f(1)=1<\log_2 3$
$\log_2 2 < f(2)=2<\log_2 5$
$\log_2 4 < f(4)=3<\log_2 9$
$\log_2 8 < f(8)=4<\log_2 17$
$\log_2 16 < f(16)=5<\log_2 33$
$\log_2 20 < f(20)=5<\log_2 41$
$\sum_{n=1}^{20}f(n)=1+2\times2+3\times4+4\times8+5\times5=74$

25. [출제의도] 등비수열을 이용한 수학외적문제 해결하기
수열 a, b, c의 공비를 r이라고 하면
$b=ar,\ c=ar^2$
그러므로 $3^a,\ 9^b,\ 27^c$은 $3^a,\ 9^{ar},\ 27^{ar^2}$이고
두 수열의 공비가 같으므로
$\frac{9^{ar}}{3^a}=\frac{27^{ar^2}}{9^{ar}}=r$
즉, $3^{2ar-a}=3^{3ar^2-2ar}=r$ ⋯ ㉠
$2ar-a=3ar^2-2ar$
$a(3r^2-4r+1)=0$
$\therefore\ r=\frac{1}{3}$ $(\because a>0,\ r\neq1)$ ⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=3$

$t_A=\frac{3^3}{3}=9,\ \ t_B=\frac{9^1}{1}=9,\ \ t_C=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}=9$

$\therefore t_A+t_B+t_C=27$

26. [출제의도] 로그함수 이해하기
함수 $f(x)=\log_2 x$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\log_2 a), \mathrm{B}(b,\log_2 b)$을 이은 선분 AB를 $1:2$로 내분한 점은 $\left(\frac{2a+b}{3}, \frac{2\log_2 a+\log_2 b}{3}\right)$이다.
내분점이 x축 위에 있으므로
$\frac{2\log_2 a+\log_2 b}{3}=0$, $\log_2 a^2b=0$ $\therefore$ $a^2b=1$

27. [출제의도] 무한급수의 합 구하기
$(n+1)|x|+n|y|=1$의
x절편은 $\pm\frac{1}{n+1}$, y절편은 $\pm\frac{1}{n}$
그러므로 $S_n=\frac{2}{n(n+1)}$
$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2$

28. [출제의도] 무한급수의 수렴 조건 이해하기
ㄱ. $-1<\log_2 x<1$ $\therefore \frac{1}{2}<x<2$ (참)
ㄴ. $\frac{(x-1)\log_2 x}{1-\log_2 x}=1$, $x\log_2 x=1$
$\log_2 x=\frac{1}{x}$이고 $y=\log_2 x$와 $y=\frac{1}{x}$의 그래프는 $\frac{1}{2}<x<2$인 범위 내에서 반드시 한 개의 교점이 생긴다. (참)
ㄷ. $-1<\log_2 x<1$, $-2<\log_2 x-1<0$
$-1<\frac{\log_2 x-1}{2}<0$ ∴ 수렴 (참)

29. [출제의도] 지수함수 이해하기
$S_k=\frac{1}{2}\{\log_2(k+1)-\log_2 k\}$
$\sum_{k=1}^{7}S_k$
$=\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 3-\log_2 2+\cdots+\log_2 8-\log_2 7)$
$=\frac{1}{2}\log_2 8=\frac{3}{2}$

30. [출제의도] 수의 규칙성을 이용하여 수학내적문제 해결하기
3^m의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되고,

8^n의 일의 자리 숫자는 8, 4, 2, 6이 반복된다.
3^m+8^n의 일의 자리의 수가 3인 경우는 3가지
ⅰ) 3^m의 일의 자리수: 9 , 8^n의 일의 자리수: 4
ⅱ) 3^m의 일의 자리수: 7 , 8^n의 일의 자리수: 6
ⅲ) 3^m의 일의 자리수: 1 , 8^n의 일의 자리수: 2
따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{16}$