

2008학년도 대학수학능력시험 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1. $(\sqrt{2\sqrt{6}})^4 = \left\{ (2\sqrt{6})^{\frac{1}{2}} \right\}^4 = (2\sqrt{6})^2 = 24$ 답 ⑤

2. $-x = t$ 로 놓으면
 $x \rightarrow -\infty$ 일 때, $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{1}{t}}{\sqrt{1 - \frac{1}{t}} + 1}$$

$$= \frac{-1+0}{1+1} = -\frac{1}{2}$$
 답 ②

3. $BA = B+E$ 에서
 $A = B^{-1}(B+E)$
 $= E + B^{-1}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은 3이다. 답 ⑤

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2x}{x-1}$ 의 극한값이 존재하고 $x \rightarrow 1$ 일 답 ①

때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 하고,
 $g(x)$ 는 다항함수이므로 연속이다.
 그러므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x)-2x) = g(1)-2=0$$

 $\therefore g(1)=2$ -----㉠
 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$ 에서
 $f(x)=(x-1)\{g(x)-1\}$ ---㉡
 따라서 ㉠과 ㉡에 의해

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1}$$

$$= \frac{\{g(1)-1\}g(1)}{2}$$

$$= \frac{(2-1) \cdot 2}{2} = 1$$
 답 ①

5. $x(x+a)(x-2a) < 0$
 $\therefore x < -a$ 또는 $0 < x < 2a$...㉠
 $x^2 + ax - 2a^2 \leq 0$
 $(x+2a)(x-a) \leq 0$
 $\therefore -2a \leq x \leq a$...㉡
 ㉠, ㉡의 공통범위는
 $-2a \leq x < -a$ 또는 $0 < x \leq a$
 이 범위에 속하는 정수 x 가 4개이려면
 두 구간의 길이 차가 a 로 같으므로 두 구간
 에 속하는 정수는 2개씩이어야 한다.
 따라서 이 구간에 속하는 정수 x 는
 1, 2, -4 , -3 이고 이들의 합은 -4 이다. 답 ①

6. $F(1 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \times 1 \times b = \frac{a}{6}$
 $\therefore b = \frac{a}{3}$
 $F(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times a = \frac{a}{2}$ 이므로
 $\frac{a}{2} + \frac{a}{6} = 1$
 $\therefore a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$
 $\therefore a - b = 1$ 답 ①

7. 주어진 함수는 삼차함수이므로
 $a \neq 0$
 $f'(x) = (x-1)(ax+1) + x(ax+1) + ax(x-1)$
 이므로 점 $P(1, 0)$ 에서의 접선 l 의 기울기는
 $f'(1) = a+1$
 또한 접선 l 과 수직이면서 점 $P(1, 0)$ 을 지
 나는
 직선의 방정식은
 $y = -\frac{1}{a+1}(x-1) \quad (a \neq -1) \dots \text{㉠}$
 따라서 ㉠과 곡선 $y = f(x)$ 가 서로 다른 세
 점에서
 만나야 하므로
 $-\frac{1}{a+1}(x-1) = x(x-1)(ax+1)$
 $(x-1)(ax^2 + x + \frac{1}{a+1}) = 0$
 이 때 $ax^2 + x + \frac{1}{a+1} = 0$ 은 $x=1$ 을 근으로
 갖지

않으므로
 $D = 1 - 4a \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{-3a+1}{a+1} > 0$
 $\frac{3a-1}{a+1} < 0, (3a-1)(a+1) < 0$
 $\therefore -1 < a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{1}{3} \quad (\because a \neq 0)$ 답 ③

8. 모든 실수 x 에 대하여
 조건 (가)에 의하여
 $f(x) > 0, g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0, g(x) < 0 \dots \text{㉠}$
 조건 (나)에서 $\frac{g(x)}{f(x)h(x)} \geq 0$ 이므로
 $f(x)g(x)h(x) \geq 0 \quad (f(x) \neq 0, h(x) \neq 0)$
 $\therefore h(x) > 0 \quad (f(x)g(x) > 0, h(x) \neq 0) \dots \text{㉡}$
 ㉠, 조건 (가)에 의하여 $f(x) = 0$ 은 실근을
 갖지 않는다. (참)
 ㉡, ㉠에서 모든 실수 x 에 대하여
 $g(x) > 0$ 또는 $g(x) < 0$
 이다. 따라서, 부등식 $g(x) > 0$ 의 해집합은 공
 집합이거나
 실수 전체의 집합이다. (참)
 ㉡, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \neq 0$ 이므로
 $|g(x)| > 0$
 또한, ㉡에서 $h(x) > 0$ 이므로
 $|g(x)| + h(x) > 0$
 따라서, 방정식 $|g(x)| + h(x) = 0$ 은 실근이
 존재하지 않는다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다. 답 ③

9. 철수가 걸린 시간은

$$\frac{10}{3} + \frac{10}{6} = 5(\text{시간})$$

$$AD = \sqrt{(10-x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{5x^2 - 20x + 100}$$

이므로

영희가 걸린 시간은

$$\frac{\sqrt{5x^2 - 20x + 100} + x + (10 - 2x)}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{5x^2 - 20x + 100} + 10 - x}{6} = 3$$

$$\therefore \sqrt{5x^2 - 20x + 100} = x + 8$$

양변을 제곱하면

$$5x^2 - 20x + 100 = x^2 + 16x + 64$$

$$4x^2 - 36x + 36 = 0$$

$$x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$\therefore x = \frac{9 - \sqrt{45}}{2} = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} \quad (\because x < 5)$$

답 ④

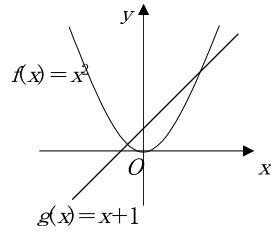
10.

$y = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에서 연속

이 되도록 하는 상수 a 의 개수는 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

...㉠

㉡. 두 다항함수 $f(x) = x^2, g(x) = x+1$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\therefore N(f, g) = 2$$

㉢. ㉠에 의해 $N(f, g) = N(g, f)$ (참)

㉣. $\{f(x)\}^3 = \{g(x)\}^3$ 에서

$$\{f(x) - g(x)\}[\{f(x)\}^2 + f(x)g(x) + \{g(x)\}^2] = 0$$

이고

$$[\{f(x)\}^2 + f(x)g(x) + \{g(x)\}^2]$$

$$= \left[\left\{ f(x) + \frac{1}{2}g(x) \right\}^2 + \frac{3}{4}\{g(x)\}^2 \right] \geq 0$$

이므로 $\{f(x)\}^3 = \{g(x)\}^3$ 를 만족하는 x 의 값의 개수는 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값의 개수와 같다.

즉, 두 함수 $h \circ f$ 와 $h \circ g$ 의 그래프의 교점의 개수는 두 함수 f 와 g 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$$\therefore N(f, g) = N(h \circ f, h \circ g) \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉣이다.

답 ⑤

11.

$(f \circ g)(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(1)$$

(i) $x \rightarrow 1+0$ 일 때, $x \neq 1$ 이고 $f(x) = f(x+2)$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$$

$$= 0$$

(ii) $x \rightarrow 1-0$ 일 때, $x \neq 1$ 이고 $f(x) = f(x+2)$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$$

$$= 0$$

(iii) $x=1$ 일 때,

$$(f \circ g)(1) = f(g(1))$$

$$= f(a)$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(a) = 0$$

그런데 $a > 1$ 이고 $f(x) = f(x+2)$ 이므로 a 의

최소값은 $a = \frac{5}{2}$

답 ②

12.

$r - p = k, 0 \leq r \leq n+1$ 이므로

$$0 \leq p \leq n+1 - k$$

따라서 변 AB는 p 에 의하여 결정되므로

변 AB를 택하는 경우의 수는

정수 p 의 개수와 같다.

이 때 정수 p 의 개수는

$$(n+1-k) - 0 + 1 = n - k + 2$$

$$\therefore \text{(가)} \quad n - k + 2$$

같은 방법으로 변 AD를 택하는 경우의 수는

정수 q 의 개수와 같으므로

$$(n-k) - 0 + 1 = n - k + 1$$

$$\therefore \text{(나)} \quad n - k + 1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{ (n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2 \}$$

$$= n(n+1)(n+2) - (2n+3) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$+ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \text{(다)} \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

답 ④

13.

$c(0) = 0.83, c(1) = 0.43$ 이므로

$$Q = kV \log \frac{0.83 - 0.03}{0.43 - 0.03} = kV \log 2$$

이때 Q 는 일정하므로

이산화탄소 농도가 0.08%일 때

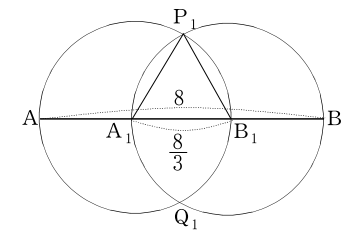
$$Q = k \times \frac{V}{t} \log \frac{0.83 - 0.03}{0.08 - 0.03} = kV \log 2$$

$$k \times \frac{V}{t} \log 16 = kV \log 2$$

$$\frac{4}{t} = 1, \therefore t = 4$$

답 ②

14.



세 선분 A_1B_1, A_1P_1, B_1P_1 의 길이는 모두 원의 반지름의 길이인 $\frac{8}{3}$ 이므로 $\triangle A_1B_1P_1$ 은 정삼각형이다.


$$\therefore \angle P_1A_1B_1 = \frac{\pi}{3}$$

따라서, 호 $P_1A_1Q_1$ 의 길이는

$$\frac{8}{3} \times \frac{2}{3} \pi = \frac{16}{9} \pi$$

이므로 두 호 $P_1A_1Q_1, P_1B_1Q_1$ 의 길이의 합은

$$l_1 = 2 \times \frac{16}{9} \pi = \frac{32}{9} \pi$$

한편,  모양의 도형을 크기 순으로 나열하면 이들은 모두 닮은꼴이고,

$$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = 8 : \frac{8}{3} = 3 : 1$$

이므로 닮음비는 3:1이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = l_1 + \frac{1}{3} l_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 l_1 + \dots$$

$$= \frac{l_1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{32}{9} \pi}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{16}{3} \pi$$

답 ④

15.

$n \leq 10$ 일 때,

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 1 + 3 = 4$$

$$a_4 = 2 + 4 = 6$$

$$a_5 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$a_6 = 2 + 4 + 6 = 12$$

$$a_7 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$a_8 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$

$$a_9 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$a_{10} = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

$n > 10$ 일 때,

$$a_{11} = a_{13} = \dots = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$a_{12} = a_{14} = \dots = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{14} a_n = 235$$

답 ⑤

16.

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1) \text{에서}$$

$$\neg. a_n = n \text{이면 } S_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$S_n T_n = n^2(n^2 - 1) \text{에서}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} T_n = n^2(n^2 - 1)$$

$$\therefore T_n = 2n(n-1)$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$b_n = T_n - T_{n-1}$$

$$= 2n(n-1) - 2(n-1)(n-2)$$

$$= 4n - 4$$

(ii) $n = 1$ 일 때, $T_1 = 0 = b_1$

$$\therefore b_n = 4n - 4 \text{ (참)}$$

$$\therefore S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d_1)}{2}$$

$$T_n = \frac{n(2b_1 + (n-1)d_2)}{2}$$

에서 $S_1 T_1 = 0$ 이므로 $a_1 b_1 = 0$

(i) $a_1 \neq 0, b_1 = 0$ 인 경우

$$S_n T_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d_1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)d_2}{2}$$

$$= n^2(n^2 - 1)$$

$$2a_1 d_2 + (n-1)d_1 d_2 = d_1 d_2 n + 2a_1 d_2 - d_1 d_2$$

$$= 4n + 4$$

이 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로 $d_1 d_2 = 4$

(ii) $a_1 = 0, b_1 \neq 0$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로

$$d_1 d_2 n + 2b_1 d_2 - d_1 d_2 = 4n + 4$$

이 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로 $d_1 d_2 = 4$

(iii) $a_1 = 0, b_1 = 0$ 인 경우

$$S_n T_n = \frac{n(n-1)d_1}{2} \cdot \frac{n(n-1)d_2}{2} = n^2(n^2 - 1)$$

$$d_1 d_2 n - d_1 d_2 = 4n - 4$$

이 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립하므로 $d_1 d_2 = 4$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의해 $d_1 d_2 = 4$

(참)

ㄷ. $S_1 T_1 = 0$ 이므로 $a_1 \neq 0$ 이면 $b_1 = 0$

$$S_n T_n = S_n \cdot \frac{n(n-1)d_2}{2} = n^2(n^2 - 1)$$

$$\therefore S_n = 2n(n+1)d_2$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n(n+1)d_2 - 2(n-1)nd_2$$

$$= 4d_2 n \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

17.

$\log_2 5x = \log_2(x+m)$ 에서 $5x = x+m$ 이므로

$$x = \frac{m}{4}$$

$\log_2(-5x) = \log_2(x+m)$ 에서 $-5x = x+m$ 이므로

$$x = -\frac{m}{6}$$

$$\therefore A\left(-\frac{1}{3}, \log_2 \frac{5}{3}\right), B\left(\frac{1}{2}, \log_2 \frac{5}{2}\right)$$

$$C\left(-\frac{m}{6}, \log_2 \frac{5}{6} m\right), D\left(\frac{m}{4}, \log_2 \frac{5}{4} m\right)$$

ㄱ. $m > 2$ 이면

$$p = -\frac{m}{6} < -\frac{1}{3}, r = \frac{m}{4} > \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

ㄴ. \overline{CD} 의 기울기는

$$\frac{\log_2 \frac{5}{4} m - \log_2 \frac{5}{6} m}{\frac{m}{4} - \frac{m}{6}} = \frac{\log_2 \left(\frac{5}{4} m \times \frac{6}{5m}\right)}{\frac{m}{12}}$$

따라서 m 의 값에 따라 기울기가 달라진다. (거짓)

$$ㄷ. \log_2 \frac{5}{2} = \log_2 \frac{5}{6} m \text{에서 } m = 3$$

이 때

$$\begin{aligned}\Delta CAB &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \left(\log_2 \frac{5}{2} - \log_2 \frac{5}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \log_2 \frac{3}{2} \\ \Delta CBD &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \left(\log_2 \frac{15}{4} - \log_2 \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \log_2 \frac{3}{2}\end{aligned}$$

이므로 두 삼각형의 넓이는 같다. (참)

답 ④

18.

시각 t 일 때의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$v_P = P'(t) = t^2 + 4$$

$$v_Q = Q'(t) = 4t$$

$$v_P = v_Q \text{에서}$$

$$t^2 + 4 = 4t, \quad t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$(t-2)^2 = 0, \quad t = 2$$

$t = 2$ 일 때 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$P(2) = \frac{8}{3} + 8 - \frac{2}{3} = 10$$

$$Q(2) = 8 - 10 = -2$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$10 - (-2) = 12$$

답 12

19.

$$0 < x < 1 \text{ 일 때, } f(x) = 2x - 1$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{a+1}{2}$$

$$x > 1 \text{ 일 때, } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^n + \frac{2}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}}$$

$$= ax^b$$

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$1 = \frac{a+1}{2} = a \quad \therefore a = 1$$

$$0 < x < 1 \text{ 일 때, } f'(x) = 2,$$

$$x > 1 \text{ 일 때, } f'(x) = abx^{b-1}$$

이고, $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

$$\text{에서 } 2 = ab$$

$$a = 1 \text{ 이므로 } b = 2$$

$$\therefore a + 10b = 1 + 10 \times 2 = 21$$

답 21

20.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$= (x+1)(x-3)$$

$x=3$ 에서 극소값 $f(3) = -9$ 를 가지므로

$$a=3, \quad b=-9$$

점 $(2, f(2))$ 에서의 접선 ℓ 방정식은

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$= -3(x-2) + \frac{8}{3} - 10$$

$$= -3x - \frac{4}{3}$$

따라서 점 $(3, -9)$ 와 직선 $9x+3y+4=0$ 사이

의 거리 d 는

$$d = \frac{|9 \cdot 3 + 3 \cdot (-9) + 4|}{\sqrt{9^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{90}}$$

이므로

$$90d^2 = 16$$

답 16

21.

$$(i) \frac{a}{x-2a} > 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{a}{x-2a} - 1 > 0, \quad \frac{3a-x}{x-2a} > 0$$

양변에 $(x-2a)^2$ 을 곱하여 정리하면

$$(x-2a)(x-3a) < 0$$

$$\therefore 2a < x < 3a$$

$$(ii) \frac{10}{x-2b} > 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{10}{x-2b} - 1 > 0, \quad \frac{10-x+2b}{x-2b} > 0$$

양변에 $(x-2b)^2$ 을 곱하여 정리하면

$$(x-2b)(x-10-2b) < 0$$

$$\therefore 2b < x < 2b+10$$

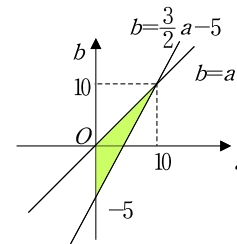
(i), (ii)에서

$2b \leq 2a$ 즉, $b \leq a$ 이고 $3a \leq 2b+10$ 이므로

$a > 0$ 에서 위 두 부등식을 동시에 만족하는

점 (a, b) 를 좌표평면 위에 나타내면 다음과

같다.



따라서 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$$

답 25

22.

$\log_9 n = m + a$ (m 은 정수, $0 \leq a < 1$)으로

놓으면

$$\log_9 n - [\log_9 n] = a$$

또, $n = 9^m \cdot 9^a$ (m 은 정수, $1 \leq 9^a < 9$)이므로 a 가 최대 즉, 9^a 가 최대가 되는 m 의 값을 구하면 된다.

m 이 두 자리자연수 이므로 $n = 9^m \cdot 9^a$ (m 은 정수, $1 \leq 9^a < 9$)로 나타내면

$$n = 10 = 9 \times \frac{10}{9}$$

$$n = 11 = 9 \times \frac{11}{9}$$

...

$$n = 80 = 9 \times \frac{80}{9}$$

$$n = 81 = 9^2 \times 1$$

$$n = 82 = 9^2 \times \frac{82}{81}$$

...

$$n = 99 = 9^2 \times \frac{99}{81}$$

따라서 $n=80$ 일 때, 9^a 의 최대값은 $\frac{80}{9}$ 을 갖는다.

답 80

23.

(가)에서

$$f(x) = ax^3 + bx \quad (a, b \text{는 정수, } a \neq 0)$$

로 놓을 수 있다.

(나)에서

$$f(1) = a + b = 5$$

$f'(x) = 3ax^2 + b$ 이므로 (다)에서

$$1 < f'(1) = 3a + b < 7$$

$b = 5 - a$ 를 $1 < f'(1) = 3a + b < 7$ 에 대입하여 정리하면

$$-2 < a < 1$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because a \neq 0)$$

이 때, $b = 6$ 이므로 $f(x) = -x^3 + 6x$

$f'(x) = -3x^2 + 6 = 0$ 에서

$$x = \pm\sqrt{2}$$

따라서 $f(x)$ 는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 극대이다.

$$\therefore m = f(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore m^2 = 32$$

답 32

24. (가)를 만족하는 함수 f 의 개수는

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24 \cdots \text{㉠}$$

(나)를 만족하는 함수 g 의 개수는

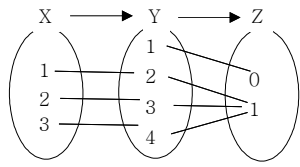
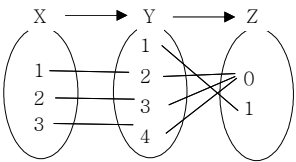
$$2^4 - 2 = 14$$

또한, 합성함수 $g \circ f$ 의 개수는

$$24 \times 14 = 336$$

이 때, 합성함수 중에서 치역이 Z 가 아닌 경우는

㉠중의 하나를 선택할 때 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.



$$\therefore 24 \times 2 = 48$$

따라서, 구하고자 하는 확률은

$$1 - \frac{48}{336} = \frac{288}{336} = \frac{6}{7}$$

$$\therefore p + q = 13$$

답 13

25.

서로 다른 3가지 색을 A, B, C 라고

하면 맨 위와 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 6$$

이다.

이 때 맨 위와 맨 아래의 사다리꼴에 A, B

두 색을 칠한 경우 중간 사다리꼴에

색을 칠하는 경우의 수는

$$A-B-A-C-B$$

$$A-B-C-A-B$$

$$A-C-A-C-B$$

$$A-C-B-A-B$$

$$A-C-B-C-B$$

로 5가지 이므로 구하는 경우의 수는

$$6 \times 5 = 30$$

답 30

미분과 적분

26.

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -\cos 2x$$

이므로 $-\cos 2x = 2\cos^2 x$ 에서

$$-(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^2 x$$

$$4\cos^2 x = 1, \quad \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

(i) $\cos x = \frac{1}{2}$ 에서

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad x = \frac{5}{3}\pi$$

(ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 에서

$$x = \frac{2}{3}\pi \quad \text{또는} \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서, 구하는 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

답 3

27.

\neg . $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right\}$$

$$= e < \text{참} >$$

$$\therefore \neg \text{에서} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$$

$$\text{또,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right\}$$

$$= e$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)f(x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f(x+1)$$

$$= e^2 < \text{참} >$$

\square . $kx-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{kx}{kx-1}\right)^{kx}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right\}$$

$$= e < \text{거짓} >$$

답 3

28.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1 - \cos(x^2)} \times \frac{1 - \cos(x^2)}{x^p} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1 - \cos(x^2)} \cdot \frac{1 - \cos^2(x^2)}{x^p} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x^2)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1 - \cos(x^2)} \cdot \frac{\sin^2(x^2)}{x^p} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x^2)} \right\}$$

$$= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x^p} \times \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x^2)}{x^p} = q$$

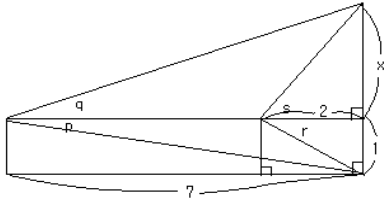
등식이 성립하려면

$$p=4, \quad q=1$$

$$\therefore p+q=5$$

답 2

29.



위의 그림에서

$$\tan p = \frac{1}{7}, \quad \tan q = \frac{x}{7} \text{ 이므로}$$

$$\tan(p+q) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{x}{7}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{x}{7}} = \frac{7(x+1)}{49-x}$$

$$\text{또, } \tan r = \frac{1}{2}, \quad \tan s = \frac{x}{2} \text{ 이므로}$$

$$\tan(r+s) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{x}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \frac{2(x+1)}{4-x}$$

이 때 $a+b = \alpha + \beta + \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan\{(p+q)-(r+s)\} &= \tan \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\frac{2(x+1)}{4-x} - \frac{7(x+1)}{49-x}}{1 + \frac{2(x+1)}{4-x} \cdot \frac{7(x+1)}{49-x}} = \frac{5x^2+75x+70}{15x^2-25x+210} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 - 10x + 14 = 0$$

위 방정식의 두 근을 $\alpha + \beta$ 라 하면

$$\alpha + \beta = 10$$

이 때 $a = \alpha + 1, b = \beta + 1$ 이므로

$$a+b = (\alpha+1) + (\beta+1) = 10+2 = 12$$

답 ①

30.

$\overline{BK} = a$ 라 하면 삼각형 EFK에서

$$\cos \theta = \frac{1}{a+1} \quad \therefore a = \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

또한, 삼각형 BKL과 삼각형 EFK는 닮은 삼각형이므로

$\angle BLK = \theta$ 이므로

$$\overline{BL} = \frac{a}{\tan \theta} = \frac{a \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BK} \times \overline{BL}}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \times \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \times \frac{2}{\sin 2\theta} \times \frac{1}{\theta^3} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{2\theta}{\sin 2\theta} \times \frac{1}{(1 + \cos \theta)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore p^2 + q^2 = 65$$

답 65r

확률과 통계

26.

자연수로 이루어진 8개의 자료

4, 8, 9, 5, 6, 8, 5, n 의 평균은

$$\frac{45+n}{8} \dots \text{㉠}$$

또한, 7개의 자료 4, 8, 9, 5, 6, 8, 5를 작은 값부터

크기 순으로 나열하면

4, 5, 5, 6, 8, 8, 9

이므로 n 이 작은 순서로 세 번째 이하에 놓일 때의 중앙값은

$$\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{45+n}{8} = \frac{11}{2}$ 이므로 $n = -1$ (모순)

n 이 작은 순서로 네 번째, 다섯 번째에 놓을 때의 중앙값은

$$\frac{n+6}{2} \dots \text{㉢}$$

㉠, ㉢에서 $\frac{45+n}{8} = \frac{n+6}{2}$ 이므로 $n = 7$

따라서 다섯 번째에 놓이면 주어진 조건을 만족한다.

n 이 작은 순서로 여섯 번째 이상에 놓일 때의 중앙값은

$$\frac{6+8}{2} = 7 \dots \text{㉣}$$

㉠, ㉣에서 $\frac{45+n}{8} = 7$ 이므로 $n = 11$

따라서 여덟 번째에 놓이면 주어진 조건을 만족한다.

그러므로 모든 n 의 값의 합은

$$7+11 = 18$$

답 ①

27.

임의로 뽑은 한 명이 기혼일 사건을 A , 여학생일 사건을 B 라 하면 구하는 확률은

$P(B|A)$ 이다.

$$P(A) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{46}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{16}{46} = \frac{8}{23}$$

답 ②

28.

ㄱ. 주어진 그래프에서 누적상대도수가 50%인 계급의 상한값이 24와 26 사이에 있으므로 중앙값은 26미만이다. (참)

ㄴ. 주어진 그래프에서 하위 50% 미만의 계급값이 20에서 24사이이고 상위 50% 이상의 계급값은 24에서 42사이에서 고르게 분포하고 있으므로 평균은 24이상이다. (참)

ㄷ. 22보다 작은 자료의 비율은 25%에서 30%사이이지만 30보다 큰 자료의 비율은 20%이므로 22보다 작은 자료의 비율이 30보다 큰 자료의 비율보다 크다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29.

A가 3이 나왔으므로 B, C가 주사위를 던져 나올 수 있는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ (가지)이다.

이 때, C가 한 번만 주사위를 던져 이기는

경우는 아래 표와 같으므로 경우의 수는 12 (가지)이다.

B	C
1	4, 5, 6
2	4, 5, 6
3	4, 5, 6
4	5, 6
5	6

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

답 ③

30.

A가 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타내기로 하자.

A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같아야 하므로 첫 경기에는 A가 이겨야 한다. 즉,

1회	2회	3회	4회	5회	6회	7회
○						

2회, 3회의 경기 결과에서

A가 두 번 모두 지지 않아야 하므로

다음 세 가지 경우가 있다.

	1회	2회	3회	4회	5회	6회	7회
(i)	○	○	○				
(ii)	○	○	×				
(iii)	○	×	○				

(i)의 경우,

4,5,6,7회의 경기 중 한 경기를 A가 이겨야 하므로 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4(\text{가지})$$

(ii),(iii)의 경우,

4회에 A가 이기면 5,6,7회 중 A가 한 경기를 이겨야 하고, 4회에 A가 지면 5회에 A

가 반드시 이기고, 6,7회 중 A가 한 경기를 이겨야 하므로 경우의 수는

$$2({}_3C_1 + {}_2C_1) = 2 \times 5 = 10(\text{가지})$$

따라서, 구하는 경우의 수는

$$4 + 10 = 14(\text{가지})$$

답 14

이산수학

26.

$[\log_2 x], [\log_2 y], [\log_2 z]$ 의 값은 모두 정수이므로

$[\log_2 x] + [\log_2 y] + [\log_2 z] = 4$ 인 경우는 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)이다.

$[\log_2 x] = 1, [\log_2 y] = 1, [\log_2 z] = 2$ 인 경우

$$1 \leq \log_2 x < 2, \quad 2 \leq x < 4 \quad \therefore x = 2, 3$$

$$1 \leq \log_2 y < 2, \quad 2 \leq y < 4 \quad \therefore y = 2, 3$$

$$2 \leq \log_2 z < 3, \quad 4 \leq z < 8$$

$$\therefore z = 4, 5, 6, 7$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$2 \times 2 \times 4 = 16$$

다른 두 경우도 같은 방법으로 구하면

각각 16가지씩이므로 구하는 경우의 수는

$$16 \times 3 = 48$$

답 ①

27.

주어진 인접행렬로 가질 수 있는 그래프는 6개의 꼭지점들의 차수가 모두 3이므로 보기에서 주어진 그래프는 모두 조건을 만족한다.

답 ⑤

28.

\mathcal{G} 는 둘째자리, 넷째자리에만 올 수 있으므로 먼저 β 의 위치를 정하고 나머지 조건을 만족하도록 문자를 배열한다.

(i) b 가 둘째자리에 올 경우

a 를 첫째자리에 놓고 나머지 c, d, e 를 조건에 맞게 배열하는 방법은 4가지

c 를 첫째자리에 놓고 나머지 a, d, e 를 조건에 맞게 배열하는 방법은 4가지 d 또는 e 를 첫째자리에 놓고 나머지를 조건에 맞게 배열하는 방법은 각각 3가지씩이므로 모두 14가지이다.

(ii) b 가 넷째자리에 올 경우

위의 (i)과 같은 방법으로 배열하면 모두 14가지

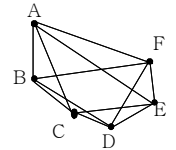
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

28가지이다.

답 ②

29.

조건을 만족하는 그래프 \mathcal{G} 는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 해밀턴회로

ABCDEFA가 존재한다. (참)

ㄴ. 모든 점의 차수가 짝수이므로

오일러회로가 존재한다. (참)

ㄷ. 그래프 \mathcal{G} 는 3가지 색을 사용하여 적절하게 색칠할 수 있다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

답 ③

30.

주어진 그래프에서 꼭짓점 a, b, c, d, e, f 에 최소 3개의 변을 추가하여 오일러회로를 갖는 그래프를 만들 수 있다.

꼭짓점 a, b, c, d, e, f 중 두 꼭짓점에 1개의 변을 추가하면 나머지 4개의 꼭짓점에 2개의 변을 추가하여 모두 짝수점이 되게 해야 한다.

두 꼭짓점에 1개의 변을 추가하는 방법의 수는 5가지이고 그 각각에 대하여 나머지 2개의 변을 추가하는 방법의 수는 3가지이므로 구하는 방법의 수는

$$5 \times 3 = 15$$

답 15