

# 수리 영역(나형)

제 2 교시

성명

수험번호

3

1

- 먼저 수험생이 선택한 과목의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하십시오.
- 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 ‘수험 생이 지켜야 할 일’ 에 따라 표기하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’ 이 포함되면 그 ‘0’ 도 답란에 반드시 표 시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하 시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

3. 행렬  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여  $(A - B^{-1})A^{-1}$ 의 모든 성분의 합은? (단,  $A^{-1}$ 는  $A$ 의 역행렬이다.) [2점]

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

1.  $\sqrt[3]{32} \times \sqrt{2} \div \sqrt[3]{4}$  의 값은? [2점]

- ①  $\sqrt{2}$
- ② 2
- ③  $2\sqrt{2}$
- ④ 4
- ⑤  $4\sqrt{2}$

2.  $\log_2 \frac{2}{9} + 4\log_2 \sqrt{12}$  의 값은? [2점]

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 3} - \sqrt{n^2 + bn + 2}) = 5$ 를 만족하는 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $a - b$ 의 값은? [3점]

- ① 2
- ② 5
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 12

5.  $x, y$ 에 대한 연립방정식  $\begin{pmatrix} |a| & |b| \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 2y \end{pmatrix}$ 가  $x=0, y=0$  이외의 해를 가질 때, 실수  $a, b$ 에 대하여 점  $P(a, b)$ 가 나타내는 도형의 둘레의 길이는? [3점]

- ①  $4\sqrt{13}$
- ②  $4\sqrt{15}$
- ③  $8\sqrt{13}$
- ④  $8\sqrt{15}$
- ⑤  $8\sqrt{17}$

6.  $x = \sqrt[8]{2} - \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$  일 때,  $\sqrt{x^2+4}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ②  $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ③  $\sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
- ④  $\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
- ⑤  $\sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$

7.  $\log_{10} A$ 의 지표를  $n$ , 가수를  $\alpha$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

< 보기 >

ㄱ.  $n = \alpha$ 이기 위한 필요충분조건은  $A = 1$ 이다.

ㄴ.  $\log_{10} 10A$ 의 가수와  $\log_{10} \frac{10}{A}$ 의 가수는 같다.

ㄷ.  $\log_{10} 100A$ 의 지표와  $\log_{10} \frac{A}{100}$ 의 지표의 합은  $2n$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 이차정사각행렬  $A$ 의 역행렬이  $A - E$ 일 때,  $A^3$ 을  $pA + qE$  꼴로 바르게 나타낸 것은? (단,  $p, q$ 는 정수,  $E$ 는 단위행렬이다.) [3점]

- ①  $A - E$
- ②  $A + E$
- ③  $A + 2E$
- ④  $2A - E$
- ⑤  $2A + E$

9. 무한급수  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 13} + \frac{4}{13 \cdot 21} + \dots$ 의 합은? [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$
- ②  $\frac{3}{4}$
- ③ 1
- ④  $\frac{5}{4}$
- ⑤  $\frac{3}{2}$

10. 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬  $A$ 에 대하여  $A + A^{-1} = O$ 가 성립할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단,  $A^{-1}$ 는  $A$ 의 역행렬,  $O$ 는 영행렬,  $n$ 은 자연수이다.) [4점]

< 보기 >

- ㄱ.  $A^3 + (A^{-1})^3 = O$
- ㄴ.  $A^{2n} + (A^{-1})^{2n} = O$
- ㄷ.  $A^{5n} + (A^{-1})^{5n} = O$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 다음 조건을 모두 만족하는 실수  $x, y$ 에 대하여 좌표평면 위의 점  $P(x, y)$ 와 원점  $O$ 를 연결한 선분  $OP$ 가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를  $\alpha$ 라 할 때, 모든  $\alpha$ 의 합은? (단,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) [4점]

I.  $x^2 + y^2 = 4$

II. 행렬  $\begin{pmatrix} x-1 & y \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖지 않는다.

- ①  $\frac{5}{3}\pi$
- ②  $2\pi$
- ③  $\frac{7}{3}\pi$
- ④  $\frac{8}{3}\pi$
- ⑤  $3\pi$

12. 원  $x^2 + y^2 = 4^n + 1 (n=1, 2, 3, \dots)$  위의 점  $P_n(2^n, 1)$ 에서의 접선이  $x$ 축과 만나는 점을  $Q_n$ 이라 하자. 삼각형  $OP_nQ_n$ 의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.) [4점]

- ①  $\frac{3}{2}$
- ② 2
- ③  $\frac{5}{2}$
- ④ 3
- ⑤  $\frac{7}{2}$

13. 무한수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?  
[4점]

< 보 기 >

ㄱ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ 이 수렴하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 도 수렴한다.

ㄴ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 이 수렴하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ 이다.

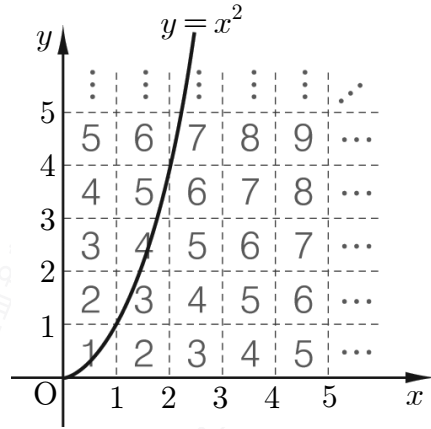
ㄷ. 무한급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 1월 초에 1000만원을 월이율 0.5%, 1개월 마다 복리로 계산하는 예금 상품에 가입하고, 1월부터 그 해 12월까지 매월 말에 50만원씩 찾았다. 그 해 12월 말에 통장에 남아있는 금액은?  
(단,  $1.005^{12} = 1.0617$ 으로 계산한다.) [4점]

- ① 426만 7000원
- ② 432만 7000원
- ③ 438만 7000원
- ④ 444만 7000원
- ⑤ 450만 7000원

15. 그림과 같이 좌표평면의 제1사분면을 한 변의 길이가 1인 정사각형들로 나누어 자연수를 배열하였다.  $y = x^2 (0 \leq x \leq 10)$ 의 그래프가 지나는 한 변의 길이가 1인 정사각형에 배열된 수들의 합은? (단, 그래프가 정사각형의 내부를 지나지 않는 경우는 제외한다.) [4점]



- ① 5625
- ② 5640
- ③ 5665
- ④ 5680
- ⑤ 5695

16. 다음은 4이상의 자연수  $n$ 에 대하여

부등식  $\frac{1!+2!+3!+\dots+n!}{n!} < 1 + \frac{2n-3}{n(n-1)}$  이 성립함을 증명

하는 과정이다. (단,  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ )

<증명>

$a_n = \frac{1!+2!+3!+\dots+n!}{n!}$  이라 하자.

(i)  $n=4$  일 때,

(좌변) =  $\frac{1!+2!+3!+4!}{4!} = \frac{33}{24}$ ,

(우변) =  $1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$  이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii)  $n=k$  ( $k \geq 4$ )일 때, 성립한다고 가정하면

$a_k < 1 + \frac{2k-3}{k(k-1)}$  이다.

$n=k+1$  일 때,

$a_{k+1} = \frac{1!+2!+3!+\dots+(k+1)!}{(k+1)!} = 1 + \boxed{\text{(가)}} a_k$

한편,  $(k-1)^2 \boxed{\text{(나)}} 2k-3$  이므로

$\frac{2k-3}{k(k-1)} < \frac{k-1}{k}$  이다.

그런데,  $1 + \frac{2k-3}{k(k-1)} < \frac{\boxed{\text{(다)}}}{k}$  이므로

$a_{k+1} < 1 + \boxed{\text{(가)}} \left\{ 1 + \frac{2k-3}{k(k-1)} \right\}$

$< 1 + \boxed{\text{(가)}} \frac{\boxed{\text{(다)}}}{k}$

$= 1 + \frac{2(k+1)-3}{(k+1)\{(k+1)-1\}}$  이다.

그러므로  $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

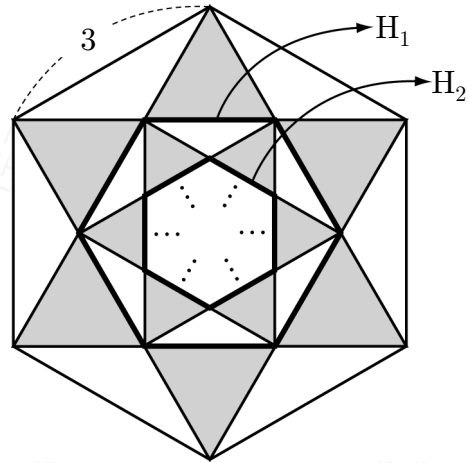
따라서 (i), (ii)에 의하여 4이상의 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{k}$	>	$2k-1$
②	$\frac{1}{k}$	<	$2k+1$
③	$\frac{1}{k+1}$	>	$2k-1$
④	$\frac{1}{k+1}$	>	$2k+1$
⑤	$\frac{1}{k+1}$	<	$2k+1$

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭지점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을  $H_1$ 이라 하고,  $H_1$ 의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둑게 칠한다.

$H_1$ 의 각 꼭지점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을  $H_2$ 라 하고,  $H_2$ 의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둑게 칠한다. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둑게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은? [4점]



①  $\frac{19}{4} \sqrt{3}$

②  $\frac{21}{4} \sqrt{3}$

③  $\frac{23}{4} \sqrt{3}$

④  $\frac{25}{4} \sqrt{3}$

⑤  $\frac{27}{4} \sqrt{3}$

## 단답형

18. 두 이차정사각행렬  $A, B$ 와 영행렬  $O$ 에 대하여,

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A+2B = \begin{pmatrix} k & -6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}, AB = O$$

를 만족하는 상수  $k$ 의 값을 구하시오. [3점]

19.  $X$ 선 필름의 사진농도  $D$ , 입사하는 빛의 세기  $I_0$ , 투과하는 빛의 세기  $I$  사이에  $D = \log_{10} I_0 - \log_{10} I$ 가 성립한다.  $X$ 선 필름의 사진농도가 2일 때, 입사하는 빛의 세기는 투과하는 빛의 세기의  $a$  배이다. 이때, 상수  $a$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 이차정사각행렬  $A$ 가  $A^2 - A - E = O$ ,  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ 를 만족한다.

연립방정식  $(A+E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 의 해를  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ 라 할 때,

$\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. (단,  $E$ 는 단위행렬,  $O$ 는 영행렬이다.) [3점]

21. 무한등비급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (x+1) \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{n-1}$ 의 합이 존재하도록 하는

모든 정수  $x$ 의 합을 구하시오. [3점]

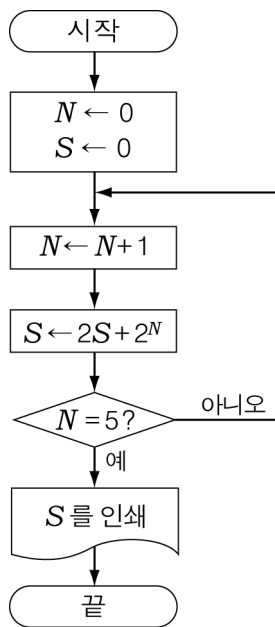
22.  $[\log_2 k] = 6$ ,  $[\log_3 k] = 3$ 을 모두 만족하는 자연수  $k$ 의 개수를 구하시오. (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [3점]

23. 두 무한수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)a_n = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+3n+2)b_n = 2$$

일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)^3 a_n b_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

24. 다음 순서도에서 인쇄되는  $S$ 의 값을 구하시오. [4점]



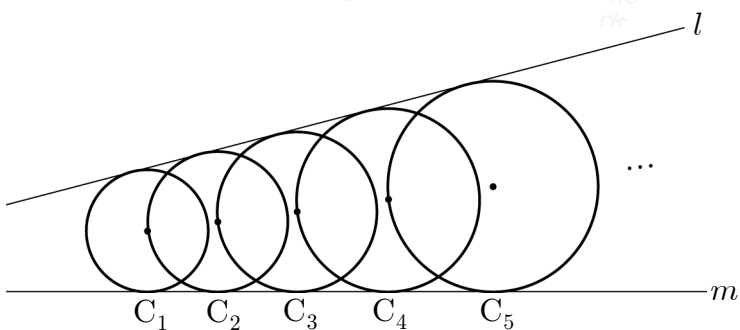
25. 그림과 같이 두 직선  $l, m$ 에 동시에 접하는 원  $C_1$ 이 있다.

원  $C_1$ 의 중심을 지나고 직선  $l, m$ 에 동시에 접하면서  $C_1$ 보다 큰 원을  $C_2$ 라 하자.

원  $C_2$ 의 중심을 지나고 직선  $l, m$ 에 동시에 접하면서  $C_2$ 보다 큰 원을  $C_3$ 라 하자.

이와 같은 방법으로 원  $C_k$ 의 중심을 지나고 직선  $l, m$ 에 동시에 접하면서  $C_k$ 보다 큰 원을  $C_{k+1}$ 이라 하자. ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

원  $C_1$ 의 넓이가 1, 원  $C_5$ 의 넓이가 4일 때, 원  $C_{19}$ 의 넓이를 구하시오. [4점]



## 5지선다형

26. 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n}$ 의 값이 존재하는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [3점]

< 보기 >

- ㉠.  $a_n = 2^n$
- ㉡.  $a_n = (-1)^n$
- ㉢.  $S_n = 3^n - 1$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

27. 수학자 드 브와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

드 브와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 브와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면 시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은? [3점]

- ① 197
- ② 205
- ③ 214
- ④ 224
- ⑤ 235

28. 2이상 140 이하의 자연수  $n$ 에 대하여, 1부터  $n$ 까지의 자연수를 모두 곱한 값과  $\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$  의 값은 정수 부분의 자리수가 일치한다. 1부터 100까지의 자연수를 모두 곱한 값의 자리수는?  
(단,  $\pi$ 와  $e$ 는 무리수이고,  $\log_{10}2=0.3010$ ,  $\log_{10}\pi=0.4971$ ,  $\log_{10}e=0.4343$ 으로 계산한다.) [4점]

- ① 152
- ② 154
- ③ 156
- ④ 158
- ⑤ 160

29. 어느 제과회사에서는 표와 같이 구성된 ‘고소한 세트’와 ‘달콤한 세트’를 판매하고 있다. 각 세트에 들어가는 과자와 사탕의 한 봉당 가격은 각각 500원, 800원이다. 이 회사에서 판매하는 ‘고소한 세트’ 10개와 ‘달콤한 세트’ 15개를 구입하려고 할 때, 필요한 금액을 나타내는 행렬은? (단, 가격할인이나 포장비용은 고려하지 않는다.) [3점]

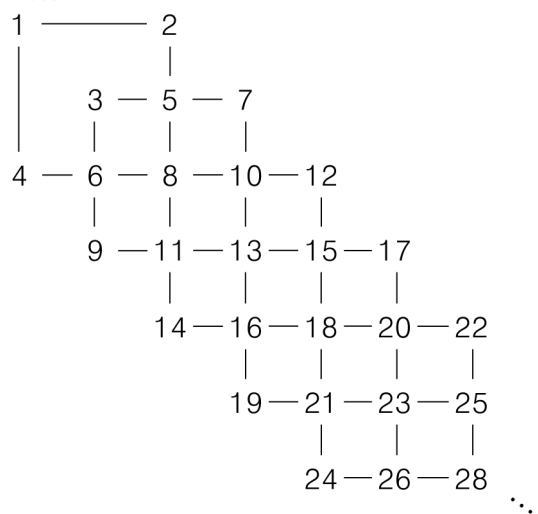
	과자(봉)	사탕(봉)
고소한 세트	5	1
달콤한 세트	2	4

- ①  $(500 \ 800) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$
- ②  $(500 \ 800) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$
- ③  $(800 \ 500) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$
- ④  $(10 \ 15) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 800 \end{pmatrix}$
- ⑤  $(10 \ 15) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \end{pmatrix}$

단답형

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형들을 한 변의 길이가 1인 정사각형이 만들어지도록 겹치게 그리고, 교점과 꼭지점에 자연수를 규칙적으로 적었다. 이때, 한 변의 길이가 2인 각 정사각형의 네 꼭지점에 적힌 자연수를 성분으로 하는 이차정사각행렬을 성분의 합이 작은 것부터 차례로  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  이라 하자.

예를 들면  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$  이다. 행렬  $A_{10}$ 의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점]



※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.