수리 영역(가형)

제 2 교시 | 성명 | 수험번호 | 3 | 1

○ 먼저 수험생이 선택한 과목의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하시오.
○ 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 '수험생이 지켜야 할 일'에 따라 표기하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\sqrt[3]{32} \times \sqrt{2} \div \sqrt[3]{4}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$
② 2
③ $2\sqrt{2}$
④ 4
⑤ $4\sqrt{2}$

2. $\log_2 \frac{2}{9} + 4\log_2 \sqrt{12}$ 의 값은? [2점]

① 5
② 6
③ 7
④ 8
⑤ 9

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{2}{3}$
② $\frac{3}{2}$
③ 2
④ 4
⑤ 6

4. 지수함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g(x)-f(x)>0$
ㄴ. $12f(x)g(x)=f(x+2)g(x+1)$
ㄷ. $a<b$이면 $f(-2a)g(a)<f(-2b)g(b)$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix}|a| & |b| \\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x \\ 2y\end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가질 때, 실수 a, b에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 나타내는 도형의 둘레의 길이는? [3점]

① $4\sqrt{13}$
② $4\sqrt{15}$
③ $8\sqrt{13}$
④ $8\sqrt{15}$
⑤ $8\sqrt{17}$

6. 로그방정식 $\log_{10}(y+5)=\log_{10}x+\log_{10}(y+1)$을 만족하는 두 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는? [3점]

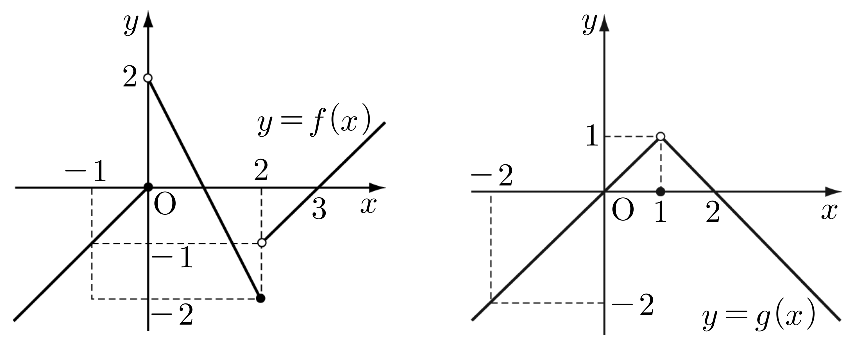
① 1
② 2
③ 3
④ 4
⑤ 5

7. 서로 다른 세 양의 실수 A, B, C가 다음 조건을 모두 만족할 때, A, B, C의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

Ⅰ. $\log_{10}\dfrac{A}{B}>0$
Ⅱ. $\log_{10}A-2\log_{10}B+\log_{10}C=0$

① $A<B<C$
② $A<C<B$
③ $B<A<C$
④ $B<C<A$
⑤ $C<B<A$

8. 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



〈 보 기 〉

ㄱ. $g(f(0))=0$
ㄴ. $y=g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $-1\leqq x\leqq 3$에서 $y=g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 2개이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 어느 퀴즈 프로그램의 우승자는 노란 공 4개, 빨간 공 1개가 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고, 꺼낸 공의 색과 같은 색의 문 중에서 하나를 선택하여 그 문 뒤에 있는 상품을 받는다. 표는 모든 문 5개의 색과 그 문 뒤에 있는 상품을 나타낸 것이다.

문의 색	상품
노란색	노트북컴퓨터
노란색	인라인스케이트
노란색	자전거
빨간색	노트북컴퓨터
빨간색	해외여행권

이 프로그램의 우승자가 상품으로 노트북컴퓨터를 받았을 때, 꺼낸 공이 노란색이었을 확률은? (단, 문을 선택하기 전에는 문 뒤에 있는 상품을 볼 수 없다.) [4점]

① $\dfrac{3}{11}$
② $\dfrac{1}{3}$
③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{8}{11}$
⑤ $\dfrac{4}{5}$

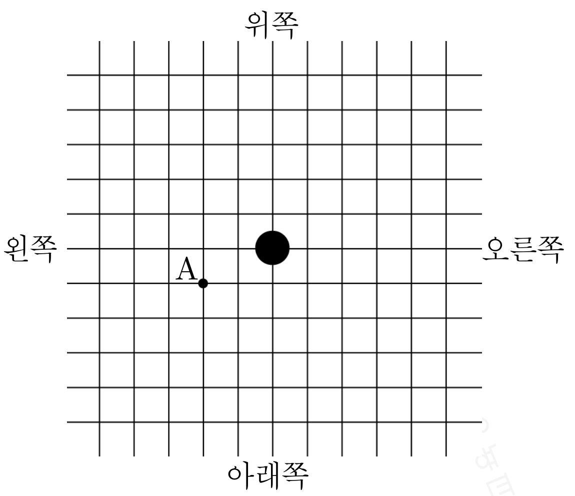
10. 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A에 대하여 $A+A^{-1}=O$가 성립할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, A^{-1}는 A의 역행렬, O는 영행렬, n은 자연수이다.) [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $A^3+\left(A^{-1}\right)^3=O$
ㄴ. $A^{2n}+\left(A^{-1}\right)^{2n}=O$
ㄷ. $A^{5n}+\left(A^{-1}\right)^{5n}=O$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 그림과 같이 바둑판의 중앙에 바둑돌 한 개가 놓여 있다.



한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수에 따라 다음과 같은 규칙으로 바둑돌을 이동시킨다.

나온 눈의 수	이동 방법
1 또는 2	오른쪽으로 1칸
3 또는 4	왼쪽으로 1칸
5	아래쪽으로 1칸
6	위쪽으로 1칸

한 개의 주사위를 5번 던졌을 때, 바둑돌이 A지점에 놓이게 될 확률은? [4점]

① $\frac{49}{972}$

② $\frac{17}{324}$

③ $\frac{53}{972}$

④ $\frac{55}{972}$

⑤ $\frac{19}{324}$

12. 원 $x^2+y^2=4^n+1\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2^n,\ 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

13. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 확률밀도함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(100-x)=f(100+x)$를 만족한다. $\mathrm{P}(m\leqq X\leqq m+8)=0.4772$일 때, 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(94\leqq X\leqq 110)$을 구하면? [4점]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

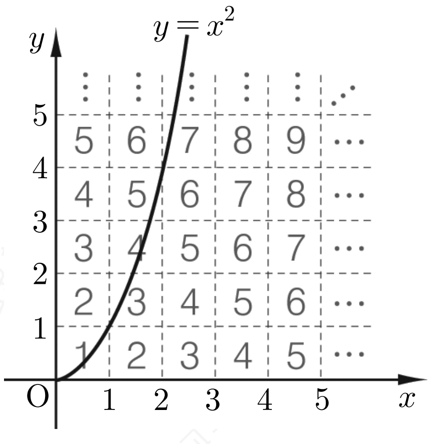
① 0.9104
② 0.9270
③ 0.9710
④ 0.9725
⑤ 0.9759

14. '0'은 2개 이하, '1'은 4개를 사용하여 이진법의 수로 나타낼 수 있는 자연수들을 원소로 하는 집합을 A라 할 때,

집합 $\{(a,\ b) \mid a-b=4k,\ k$는 정수, $a \in A,\ b \in A\}$의 원소의 개수는? [4점]

① 15
② 33
③ 69
④ 83
⑤ 98

15. 그림과 같이 좌표평면의 제1사분면을 한 변의 길이가 1인 정사각형들로 나누어 자연수를 배열하였다. $y=x^2(0 \leqq x \leqq 10)$의 그래프가 지나는 한 변의 길이가 1인 정사각형에 배열된 수들의 합은? (단, 그래프가 정사각형의 내부를 지나지 않는 경우는 제외한다.) [4점]



① 5625
② 5640
③ 5665
④ 5680
⑤ 5695

16. 다음은 4이상의 자연수 n에 대하여

부등식 $\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!} < 1+\dfrac{2n-3}{n(n-1)}$ 이 성립함을 증명하는 과정이다. (단, $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$)

<증명>

$a_n = \dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$ 이라 하자.

(i) $n=4$ 일 때,

(좌변) = $\dfrac{1!+2!+3!+4!}{4!} = \dfrac{33}{24}$,

(우변) = $1+\dfrac{5}{12} = \dfrac{17}{12}$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geqq4)$일 때, 성립한다고 가정하면

$a_k < 1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}$ 이다.

$n=k+1$ 일 때,

$a_{k+1} = \dfrac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+1)!} = 1+\boxed{\text{(가)}}\,a_k$

한편, $(k-1)^2 \boxed{\text{(나)}} 2k-3$ 이므로

$\dfrac{2k-3}{k(k-1)} < \dfrac{k-1}{k}$ 이다.

그런데, $1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)} < \dfrac{\boxed{\text{(다)}}}{k}$ 이므로

$a_{k+1} < 1+\boxed{\text{(가)}}\left\{1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}\right\}$

$< 1+\boxed{\text{(가)}}\,\dfrac{\boxed{\text{(다)}}}{k}$

$= 1+\dfrac{2(k+1)-3}{(k+1)\{(k+1)-1\}}$ 이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 4이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

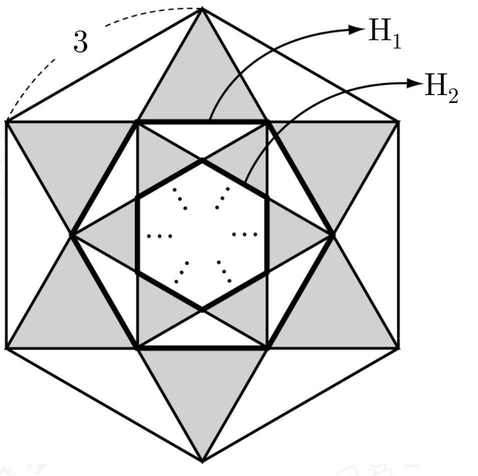
이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{1}{k}$	$>$	$2k-1$
②	$\dfrac{1}{k}$	$<$	$2k+1$
③	$\dfrac{1}{k+1}$	$>$	$2k-1$
④	$\dfrac{1}{k+1}$	$>$	$2k+1$
⑤	$\dfrac{1}{k+1}$	$<$	$2k+1$

17. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭지점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_1이라 하고, H_1의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.

H_1의 각 꼭지점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_2라 하고, H_2의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.

이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둡게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은? [4점]



① $\dfrac{19}{4}\sqrt{3}$

② $\dfrac{21}{4}\sqrt{3}$

③ $\dfrac{23}{4}\sqrt{3}$

④ $\dfrac{25}{4}\sqrt{3}$

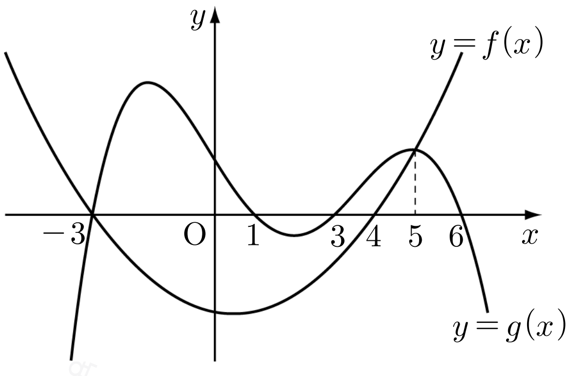
⑤ $\dfrac{27}{4}\sqrt{3}$

단답형

18. 두 이차정사각행렬 A, B와 영행렬 O에 대하여,
$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A+2B=\begin{pmatrix}k&-6\\7&-5\end{pmatrix}$, $AB=O$를 만족하는 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

19. 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{4}$인 사건 A가 있다. 80번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 할 때, X^2의 평균 $\mathrm{E}\left(X^2\right)$을 구하시오. [3점]

20. 이차함수 $y=f(x)$와 사차함수 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 방정식 $g(x)\left\{\frac{g(x)}{f(x)}-1\right\}=0$의 모든 근의 합을 구하시오. [3점]



21. $\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3}=2$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

22. x에 대한 부등식 $\frac{(x-2)^3(x-10)^5}{|x-5|}<0$을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오. [3점]

23. 두 함수 $f(x)=x^5+x^3-3x^2+k$, $g(x)=x^3-5x^2+3$에 대하여 구간 $(1,\ 2)$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

24. 출발점에서 도착점까지의 거리를 3등분하여 각 구간을 싸이클, 경보, 달리기의 순서로 진행하는 경기가 있다. 싸이클과 경보 구간의 평균 속력이 각각 시속 30km, 시속 9km인 선수가 있다.

이 선수의 전체 구간의 평균 속력이 시속 15km이상이 되기 위한 달리기 구간의 평균 속력의 최소값이 시속 $a$km일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

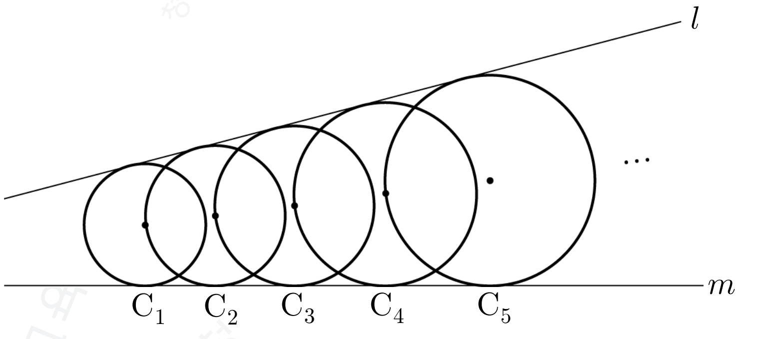
25. 그림과 같이 두 직선 l, m에 동시에 접하는 원 C_1이 있다.

원 C_1의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_1보다 큰 원을 C_2라 하자.

원 C_2의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_2보다 큰 원을 C_3라 하자.

이와 같은 방법으로 원 C_k의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_k보다 큰 원을 C_{k+1}이라 하자.($k=1, 2, 3, \cdots$)

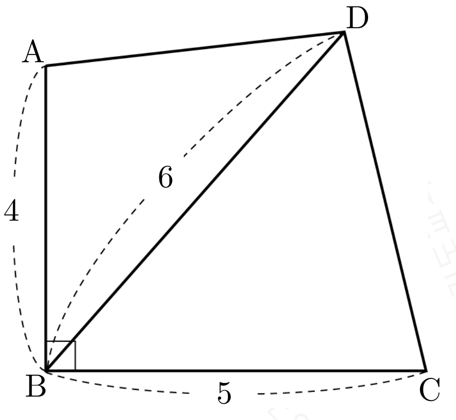
원 C_1의 넓이가 1, 원 C_5의 넓이가 4일 때, 원 C_{19}의 넓이를 구하시오. [4점]



26번부터 30번까지는 선택과목 문항입니다. 선택한 과목의 문제를 풀기 바랍니다.

미분과 적분

26. 사각형 ABCD에서 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$, $\overline{\mathrm{BD}}=6$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최대값은? [3점]



① $3\sqrt{41}$
② $3\sqrt{42}$
③ $3\sqrt{43}$
④ $6\sqrt{11}$
⑤ $9\sqrt{5}$

27. $\sin\alpha+\cos\beta+\sin\gamma=0$, $\cos\alpha+\sin\beta+\cos\gamma=0$을 만족할 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① -1
② $-\frac{1}{2}$
③ 0
④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

28. 방정식 $4(\sin^3 x-\cos^3 x)=3(\sin x-\cos x)$의 모든 실근의 합은? (단, $0 \leqq x \leqq \pi$) [4점]

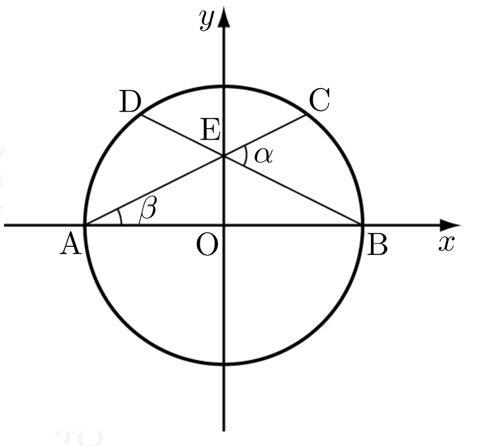
① π
② $\frac{5}{4}\pi$
③ $\frac{3}{2}\pi$
④ $\frac{7}{4}\pi$
⑤ 2π

29. $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ 일 때, $\sin\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{3\theta}{2}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

① $\dfrac{8\sqrt{5}}{25}$
② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
③ $\dfrac{12\sqrt{5}}{25}$
④ $\dfrac{14\sqrt{5}}{25}$
⑤ $\dfrac{16\sqrt{5}}{25}$

단답형

30. 그림에서 원점 O를 중심으로 하는 원이 x축과 만나는 두 점은 A, B이고, 원의 두 현 AC와 BD의 교점 E는 y축 위에 있으며 $\angle\mathrm{CEB}=\alpha$, $\angle\mathrm{CAB}=\beta$이다.
$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin^2\beta=\dfrac{b}{a}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로 소인 자연수이다.) [3점]



※ 확인사항
◯ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

확률과 통계

26. 다음은 25명의 학생들의 한 달간 인터넷 사용시간을 나타낸 것이다. 이 자료를 누적상대도수분포표로 나타낼 때, A의 값은? [3점]

(단위 : 시간)

16	22	28	30	30	32	33	33	36	37	38	40	44
45	48	51	52	53	54	56	56	59	62	66	67	

<누적상대도수분포표>

사용시간(시간)	누적상대도수
10이상 ~ 20미만	
20 ~ 30	
30 ~ 40	
40 ~ 50	A
50 ~ 60	
60 ~ 70	

① 0.12
② 0.16
③ 0.44
④ 0.60
⑤ 0.88

27. 다음은 100명의 볼링 점수를 정렬하여 나타낸 것이다.

(단위 : 점)

67	69	69	71	72	72	73	74	76	76
76	77	78	78	79	80	82	82	82	83
83	84	85	85	85	86	86	87	88	88
89	89	91	92	92	92	93	93	94	94
94	94	95	105	106	106	108	108	109	112
112	114	114	116	117	118	121	121	121	122
122	123	124	124	124	124	125	126	127	127
127	127	128	129	134	135	140	141	145	146
163	163	163	187	193	202	202	203	205	205
210	215	216	217	218	218	220	220	220	223

이 자료로 도수분포표를 만들기 위해 계급의 수와 계급의 크기를 다음의 방법으로 결정하려고 한다.

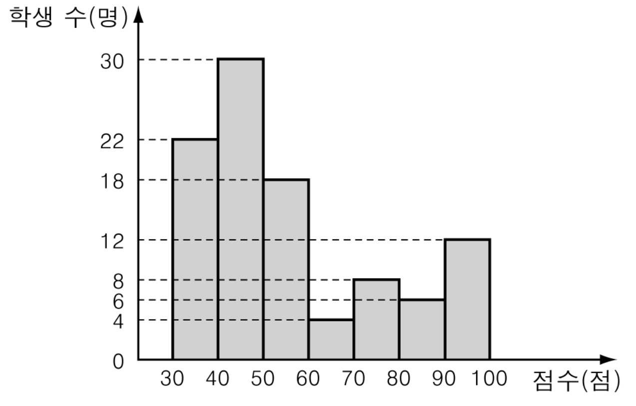
Ⅰ. 계급의 수 :
$(1+3.3\log_{10}n)$을 소수점 이하 첫째자리에서 반올림한 자연수 (단, n은 표본의 크기이다.)

Ⅱ. 계급의 크기 :
$\dfrac{(\text{자료의 최대값})-(\text{자료의 최소값})}{(\text{Ⅰ에서 구한 계급의 수})}$보다 크거나 같은 최소의 5의 배수

이 방법으로 계산한 계급의 수를 a, 계급의 크기를 b라 할때, $a+b$의 값은? [3점]

① 26
② 28
③ 30
④ 32
⑤ 34

28. 다음은 학생 100명의 수학 점수를 히스토그램으로 나타낸 것이다.



이 학생들의 수학 점수에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [3점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 범위는 70점 이하의 값이다.
ㄴ. 70점 이상인 학생의 수는 전체의 24%이다.
ㄷ. 중앙값이 속한 계급에 대한 상대도수는 0.30이다.

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 어느 시험에서 여학생의 평균이 남학생보다 3점 높고 남학생의 분산은 15, 여학생의 분산은 12이다. 시험에 응시한 남학생의 수가 여학생의 2배일 때, 시험에 응시한 전체 학생의 분산은? [4점]

① 13
② 14
③ 15
④ 16
⑤ 17

단답형

30. 다음은 십의 자리의 수를 줄기로, 일의 자리의 수를 잎으로 하여 나타낸 어떤 자료에 대한 줄기와 잎 그림이다.

줄기	잎
0	6
1	2 7
2	0 5 9
3	2 a b c 6
4	3 4 5
5	3

중앙값이 33, 최빈값이 35일 때, 이 자료의 평균을 구하시오. [4점]

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이산수학

26. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f: X \rightarrow Y$의 개수는? [3점]

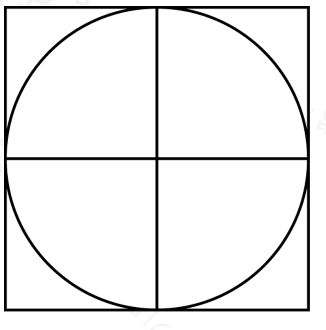
> Ⅰ. $f(4)=5$
> Ⅱ. 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

① 8
② 9
③ 10
④ 11
⑤ 12

27. 6명의 학생을 첫째 날 4명, 둘째 날 2명으로 나누어 한 사람씩 순서대로 상담하려고 한다. 이때, 상담 순서를 정하는 방법의 수는? [3점]

① 120
② 240
③ 360
④ 480
⑤ 720

28. 정사각형에 내접하는 원을 4등분하여 그림과 같은 도형을 만들었다. 도형의 한 영역에 한 가지 색만 사용하여, 8개의 영역에 서로 다른 8가지 색을 모두 칠하는 방법의 수는? (단, 회전에 의하여 겹쳐지는 것들은 같은 것으로 한다.) [3점]



① $\dfrac{8!}{5}$
② $\dfrac{8!}{4}$
③ $\dfrac{8!}{3}$
④ $\dfrac{8!}{2}$
⑤ $8!$

29. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합 $A,\ B$가 다음 조건을 모두 만족할 때, 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [4점]

Ⅰ. $1 \not\in A \cap B$
Ⅱ. 집합 $A-B$의 원소의 개수는 2개이다.

① 864
② 891
③ 918
④ 945
⑤ 972

단답형

30. 그림과 같이 3×3칸의 정사각형에 숫자 2와 7이 적혀 있다. 빈칸에 2와 7을 제외한 1에서 9까지의 자연수를 한 칸에 하나씩 모두 배열할 때, 같은 줄(가로, 세로, 대각선)에는 3의 배수가 1개 이하인 경우의 수를 구하시오. [4점]

	2	
		7

※ 확인사항
○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.