2009 대학수학능력시험 대비

2008학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	③	*2*	④	*3*	③	*4*	①	*5*	③
6	②	*7*	④	*8*	⑤	*9*	②	*10*	④
11	⑤	*12*	⑤	*13*	②	*14*	③	*15*	⑤
16	⑤	*17*	①	*18*	32	*19*	672	*20*	55
21	128	*22*	24	*23*	310	*24*	81	*25*	79
26	①	*27*	①	*28*	②	*29*	④	*30*	36

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[3]{(8\times27)^2}=\sqrt[3]{6^6}=\sqrt[3]{36^3}=36$

2. [출제의도] 역행렬을 이해하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}X=B$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$AA^{-1}X=AB$

$\therefore\ X=AB=\begin{pmatrix}2&3\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-2\\1&6\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 14이다.

3. [출제의도] 이항분포의 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$V(X)=n\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=20$

$\therefore\ n=90$

4. [출제의도] 서로 독립인 두 사건의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{4}$

또, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{9}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{9}{16}=\dfrac{15}{16}$

5. [출제의도] 연립방정식과 행렬을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식 $\begin{pmatrix}2-k&3\\2&1-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이

$x=0, y=0$ 이외의 해를 가지려면

$(2-k)(1-k)-3\cdot2=0$

즉, $k^2-3k-4=0$ $\therefore\ k=-1, 4$

따라서 구하는 실수 k의 값의 합은 3이다.

6. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2}$

$n<\sqrt{n^2+1}<n+1$

$\therefore\ a_n=n$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\left(\sqrt{n^2+1}-a_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

7. [출제의도] 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

5는 반드시 포함되어야 하므로 5를 뽑는 경우의 수는 1(가지)

5를 제외한 8개의 자연수 중에서 나머지 두 수를 뽑을 때 적어도 하나의 짝수를 뽑는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2-{}_4\mathrm{C}_2=28-6=22$(가지)

뽑힌 3개의 자연수를 이용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$3!=6$(개)

따라서 구하는 자연수의 개수는

$1\times22\times6=132$(개)

8. [출제의도] 로그의 대소관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $0<a<1, b>1$ 이므로 $\log_a b<\log_a 1=0$

$\therefore\ A=\dfrac{1}{2}\log_a b<0$ (참)

ㄴ. $0<a<1, b<\dfrac{1}{a}$ 이므로 $\log_a b>\log_a\dfrac{1}{a}=-1$

$\therefore\ A=\dfrac{1}{2}\log_a b>-\dfrac{1}{2}$

따라서 $-\dfrac{1}{2}<A<0$ 이므로 $B=\dfrac{1}{A}<-2$

$\therefore\ A>B$ (참)

ㄷ. $A=\dfrac{1}{B}$ 이므로 $AB=1$

$\therefore\ \log_{ab}|A|+\log_{ab}|B|=\log_{ab}|AB|=\log_{ab}1=0$(참)

9. [출제의도] 등비수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4$

$=a(1+r+r^2+r^3+r^4)=\dfrac{31}{2}$

$a_1a_2a_3a_4a_5=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot ar^3\cdot ar^4=a^5r^{10}=32$

$\therefore\ ar^2=2$

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}$

$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}+\dfrac{1}{ar^3}+\dfrac{1}{ar^4}$

$=\dfrac{1}{ar^4}(1+r+r^2+r^3+r^4)$

$=\dfrac{a}{(ar^2)^2}(1+r+r^2+r^3+r^4)=\dfrac{31}{8}$

10. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$(a,\ b)\in A$, $(c,\ d)\in B$이므로

$3^a=b$, $\log_3 c=d$이다.

ㄱ. (반례) $a=1$, $b=3$일 때 $(1,\ 3)\in A$이지만 $(1^3,\ 3\cdot3)\notin A$이다. (거짓)

ㄴ. $3^a=b$ 즉, $\log_3 b=a$

$\therefore\ (b,\ a)\in B$ (참)

ㄷ. $3^a=b$, $\log_3 c=d$ 즉, $3^d=c$가 성립하므로

$3^{a+d}=bc$

$\therefore\ (a+d,\ bc)\in A$ (참)

11. [출제의도] 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_6=a_3+1=(a_1-1)+1=1$ (참)

ㄴ. $n=2^k$이면

$a_n=a_{2^k}=a_{2^{k-1}}+1=a_{2^{k-2}}+2=\cdots$

$=a_{2^0}+k=k+1$ (참)

ㄷ. $a_{2n}=a_n+1, a_{2n+1}=a_n-1$이므로

$a_{2n}-a_{2n+1}=2$가 성립한다.

$\therefore\ a_{2^k}-a_{2^k+1}=2$

따라서 $n=2^k+1$일 때, ㄴ을 이용하면

$a_n=a_{2^k+1}=a_{2^k}-2=(k+1)-2=k-1$ (참)

12. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $N_{15}=1515\cdots15$ 는 2×15자리의 수이므로

$\log N_{15}$ 의 지표는 $30-1=29$이다.

$\therefore\ p(15)=29$ (거짓)

ㄴ. $q(n)=0$이면 $\log N_n=p(n)$ (정수)

즉, $N_n=10^{p(n)}$이다.

한편, $q(1)=0$이고, $n\neq1$이면 N_n은 10^k의 꼴이 될 수 없다. 즉, $q(n)\neq0$

따라서 n은 1뿐이다. (참)

ㄷ. $n=10^k$은 $(k+1)$자리의 수이고

N_n은 $n(k+1)$자리의 수이므로

$p(n)=nk+n-1$

이때 $n-1=10^k-1$은 k자리의 수이고

N_{n-1}은 $(n-1)k$자리의 수이므로

$p(n-1)=nk-k-1$

$\therefore\ p(n)-p(n-1)=n+k$ (참)

13. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(가) : 1

(나) : $(k+1)a_k-k$

(다) : $\dfrac{1}{k+1}$

14. [출제의도] 이산확률변수의 평균과 분산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\mathrm{P}(Y=k)=\mathrm{P}(X=10-k)$이므로

$\mathrm{P}(5\leq Y\leq7)=\mathrm{P}(3\leq X\leq5)$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{2}\cdot10=5$

$Y=10-X$에서

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(10-X)=10-\mathrm{E}(X)=5$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)$ (참)

ㄷ. $Y=10-X$에서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10-X)=\mathrm{V}(X)$

$\therefore\ \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(X)$ (거짓)

15. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

임의의 두 점을 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$라 하면,

$M_{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$, $M_{\mathrm{Q}}=\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}$

ㄱ. $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd&ad+bc\\-ad-bc&ac-bd\end{pmatrix}$

에 대응하는 점 $\mathrm{R}\ (ac-bd,\ ad+bc)$가 존재한다. (참)

ㄴ. $M_{\mathrm{Q}}M_{\mathrm{P}}=\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$

$\therefore\ M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{Q}}=M_{\mathrm{Q}}M_{\mathrm{P}}$ (참)

ㄷ. 점 P 가 원점이 아니면 $a^2+b^2\neq 0$ 이므로

$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

따라서 $M_{\mathrm{P}}M_{\mathrm{S}}=E$인 점 $\mathrm{S}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

가 존재한다. (참)

16. **[출제의도] 등비수열의 합을 이해하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

A지역의 연간 휘발유 소비량이 전년도의 r배로 감소한다고 하면

2007년의 휘발유 소비량은 a톤,

2008년의 휘발유 소비량은 ar톤, $\cdots$,

2015년의 휘발유 소비량은 ar^8톤으로 놓을 수 있다.

이때 2015년의 휘발유 소비량은 $\dfrac{1}{3}a$톤이므로

$ar^8=\dfrac{1}{3}a,\ r^8=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ r=\sqrt[8]{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}=\dfrac{1}{1.15}=\dfrac{20}{23}$

따라서 16년 동안 사용되는 휘발유 전체의 양은

$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{15}$

$=\dfrac{a(1-r^{16})}{1-r}=\dfrac{a\left(1-\dfrac{1}{9}\right)}{1-\dfrac{20}{23}}=\dfrac{184}{27}a$(톤)

17. **[출제의도] 무한등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$S_1=\pi-\left\{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}+\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=\dfrac{\pi+1}{2}$

원 C_n 의 지름의 길이를 l_n이라 하면

$l_{n+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l_n$이므로

$S_{n+1}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2S_n=\dfrac{1}{2}S_n$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{\pi+1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=\pi+1$

18. **[출제의도] 로그방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\log_2 x-6=t$로 치환하면 $\log_2 x=t+6$ 이므로

$(\log_2 x-6)^2+\log_2 x^2-11=t^2+2(t+6)-11=0$

$t^2+2t+1=(t+1)^2=0$

$\therefore\ t=-1$

이때 $\log_2 x=5$이므로

$x=2^5=32$

19. **[출제의도] 이항계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(2x)^r\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{7-r}={}_7\mathrm{C}_r\times 2^r\times(-1)^{7-r}\times x^{2r-7}$

이므로 $2r-7=3$에서 $r=5$

따라서 x^3 의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_5\times 2^5\times(-1)^2=672$

20. **[출제의도] 등차수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 등차수열이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}+\dfrac{10(b_1+b_{10})}{2}$

$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}=500$

$\therefore\ a_{10}+b_{10}=55$

21. **[출제의도] 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$4^a>0,\ 2^b>0$ 이므로

$4^a+2^b\geqq 2\sqrt{4^a\cdot 2^b}=2\sqrt{2^{2a+b}}=2\sqrt{2^{12}}=128$

(단, 등호는 $a=3,\ b=6$ 일 때 성립한다.)

22. **[출제의도] 상용로그의 값과 $\sum$의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

정의에 따라 $[\log_{10}S_n]$ 는 $\log_{10}S_n$ 의 지표와 같다.

$S_1=1,\ S_2=1+2=3,\ S_3=1+2+3=6$ 이므로

$[\log_{10}S_1]=[\log_{10}S_2]=[\log_{10}S_3]=0$

$S_4=1+2+3+4=10,$

$S_{13}=1+2+3+\cdots+13=91$이므로

$[\log_{10}S_4]=[\log_{10}S_5]=\cdots=[\log_{10}S_{13}]=1$

$S_{14}=1+2+3+\cdots+14=105,$

$S_{20}=1+2+3+\cdots+20=210$이므로

$[\log_{10}S_{14}]=[\log_{10}S_{15}]=\cdots=[\log_{10}S_{20}]=2$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{20}[\log_{10}S_n]=0\times 3+1\times 10+2\times 7=24$

23. **[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$100\leqq A<1000,\ 900<B<1000$이고,

$\log B$의 가수가 $\log A$의 가수의 2 배이므로

$\log A=2+\alpha,\ \log B=2+2\alpha\ \left(0\leqq\alpha<\dfrac{1}{2}\right)$

$2\log A-\log B=\log\dfrac{A^2}{B}=2$ 이므로 $\dfrac{A^2}{B}=100$

$\therefore\ 100B=A^2$

A는 10의 배수이므로 $A=10C$ (C는 자연수)라 하면 $100B=(10C)^2=100C^2\quad\therefore\ B=C^2$

따라서 B는 900보다 큰 세 자리의 수이면서 완전제곱수이다.

$30^2=900,\quad 31^2=961,\quad 32^2=1024$이므로

$B=31^2,\ A^2=100B=10^2\cdot 31^2=(310)^2$

$\therefore\ A=310$

24. **[출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$x,\ y$에 관한 연립방정식을 만들면

$\begin{cases} 0.6x+0.3y=45 \\ 0.5x+0.4y=42 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+3y=450 \\ 5x+4y=420 \end{cases}$

이것을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=4,\ b=-5$

$\therefore\ (a-b)^2=(4+5)^2=81$

25. **[출제의도] 독립시행의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

4개의 동전을 던질 때, 앞면과 뒷면이 각각 2개씩 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\left(1-\dfrac{3}{8}\right)\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{15}{64}$

$\therefore\ p+q=79$

26. **[출제의도] 무한급수의 뜻을 알고 있는가를 묻는 문제이다.**

$n\geqq 2$일 때 $S_n-a_n=S_{n-1}$이므로

$S_n-a_n=S_{n-1}=\dfrac{n+3}{n+2}\ \ (n\geqq 2)$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=1$

27. **[출제의도] 조건부확률을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

진서가 던진 주사위가 홀수인 눈이 나오는 사건을 A, 진서가 이기는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}\times 0+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

28. **[출제의도] 지수함수의 그래프와 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

곡선 $y=3^x$ 을 x축의 방향으로 b_k만큼 평행이동시킨 곡선 $y=3^{x-b_k}$ 이 점 $(k,\ 2)$ 를 지난다고 하면

$2=3^{k-b_k}$ 이다.

$\therefore\ 3^{-b_k}=\dfrac{2}{3^k}$

이때 곡선 $y=3^{x-b_k}$ 의 y절편은 3^{-b_k} 이므로

$a_k=3^{-b_k}=\dfrac{2}{3^k}$ 이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}=2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

$=\dfrac{\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=1$

29. **[출제의도] 표본평균의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

제품 A의 무게를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$ 을 따르므로

$p_1=\mathrm{P}(X\geqq 130)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\dfrac{130-120}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geqq 1)=0.5-\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1)$

$=0.1587$

한편, 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 5^2)$ 을 따르므로

$p_2=\mathrm{P}(\overline{X}\geqq 130)=\mathrm{P}\left(Z\geqq\dfrac{130-120}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geqq 2)=0.5-\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 2)$

$=0.0228$

$\therefore\ p_1-p_2=0.1359$

30. **[출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(i) A, B가 2인용 소파에 앉는 경우의 수는
$2!\times 3!=2\times 6=12$(가지)
(ii) A, B가 3인용 소파에 앉는 경우의 수는
$2\times 2!\times 3!=24$ (가지)
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$12+24=36$(가지)

수리'나'형 정답

1	③	2	④	3	②	4	①	5	③
6	②	7	①	8	④	9	②	10	①
11	⑤	12	⑤	13	②	14	①	15	⑤
16	⑤	17	④	18	48	19	52	20	55
21	128	22	24	23	310	24	81	25	60
26	④	27	④	28	③	29	③	30	650

해 설

1. '가'형과 동일

2. '가'형과 동일

3. **[출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

4. **[출제의도] 로그의 정의를 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$4^a=3-2\sqrt{2}$, $2^a=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$
$2^{-a}=\dfrac{1}{2^a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$
$\therefore\ 2^a+2^{-a}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$

5. '가'형과 동일

6. '가'형과 동일

7. **[출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$A(A+2E)=E$에서 $A^2+2A=E$이므로
$(A-E)(A+3E)=-2E$
$-\dfrac{1}{2}(A+3E)(A-E)=E$
$\therefore\ (A-E)^{-1}=-\dfrac{1}{2}A-\dfrac{3}{2}E$
$\therefore\ p+q=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=-2$

8. **[출제의도] 행렬의 연산과 역행렬의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$이라 하면
$AB=A$가 성립하지만 $B\neq E$이다. (거짓)
ㄴ. $A^2-A+E=O$의 양변에 $A+E$를 곱하면
$(A+E)(A^2-A+E)=O$, $A^3+E=O$
$\therefore\ A^3=-E$ (참)
ㄷ. A^2의 역행렬 B가 존재하면 $A^2B=E$이므로
$A^3(AB^2)$
$=A^4B^2=A^2(A^2B)B=A^2EB=A^2B=E$
$\therefore\ (A^3)^{-1}=AB^2$
따라서 A^3의 역행렬이 존재한다. (참)

9. '가'형과 동일

10. **[출제의도] 자연수의 합을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

주어진 수열은 3의 배수를 함께 생각하면
1, 2, ❸, 4, 5, ❻, ⋯, 44, ⓯
$$\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{45}k-\sum_{k=1}^{15}3k=\frac{45\times 46}{2}-3\times\frac{15\times 16}{2}=675$$

11. '가'형과 동일

12. '가'형과 동일

13. '가'형과 동일

14. **[출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\begin{pmatrix}x-2 & -y\\ y-2 & x+2\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로
$(x-2)(x+2)+y(y-2)=0$
$\therefore\ x^2+(y-1)^2=5$
따라서 점 (x, y)가 나타내는 도형은 중심이 $(0,1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원이다.

15. '가'형과 동일

16. '가'형과 동일

17. **[출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

도형 S_1의 넓이는 12개의 합동인 작은 정삼각형의 넓이의 합과 같고, 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 2이므로 S_1의 넓이는
$12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=12\sqrt{3}$
또한, S_n과 S_{n+1}은 닮은 도형이고 닮음비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.
따라서 S_{10}의 넓이는
$12\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^9=3\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^8=\dfrac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$이다.

18. **[출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

첫째항을 a, 공비를 r라고 하면
$a_1a_2=6$에서 $a^2r=6$ ⋯ ㉠
$a_3a_4=12$에서 $a^2r^5=12$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $r^4=2$
$\therefore\ a_7a_8=ar^6\cdot ar^7=a^2r^{13}=a^2r^5\cdot(r^4)^2$
$=12\times 2^2=48$

19. **[출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$(A+B)^2=(A^2+B^2)+(AB+BA)$
$=\begin{pmatrix}5 & 0\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$
$(A+B)^{100}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{50}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 50 & 1\end{pmatrix}$
행렬 $(A+B)^{100}$의 모든 성분의 합은 52이다.
[참고] $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$인 경우 성립.

20. '가'형과 동일

21. '가'형과 동일

22. '가'형과 동일

23. '가'형과 동일

24. '가'형과 동일

25. **[출제의도] 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로
$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ ($d>0$)라 하면
5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로
$5a=15^2\pi$ $\therefore\ a=45\pi$
또, 주어진 조건으로부터
$(a+2d)=2(a-2d)$에서 $d=\dfrac{a}{6}=\dfrac{15\pi}{2}$
따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는
$a+2d=45\pi+2\cdot\dfrac{15}{2}\pi=60\pi$ $\therefore\ k=60$

26. **[출제의도] 무한등비수열의 수렴 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

주어진 수열이 수렴할 조건은
$-1<-\sin\dfrac{k\pi}{4}\leqq 1$, $-1\leqq\sin\dfrac{k\pi}{4}<1$
따라서 $\sin\dfrac{k\pi}{4}=1$인 10이하의 자연수 k는 2, 10이므로 구하는 자연수의 개수는 8(개)이다.

27. **[출제의도] 지수법칙을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$3^{x+1}-3^x=2\cdot 3^x=a$ $\therefore\ 3^x=\dfrac{a}{2}$
$2^{x+1}+2^x=3\cdot 2^x=b$ $\therefore\ 2^x=\dfrac{b}{3}$
$\therefore\ 12^x=2^{2x}\times 3^x=\dfrac{ab^2}{18}$

28. **[출제의도] 등비수열과 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $S_1=a_1$이므로 $pa_1+1=a_1$
$\therefore\ a_1=\dfrac{1}{1-p}$ (참)
ㄴ. $n\geqq 2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(pa_n+1)-(pa_{n-1}+1)=pa_n-pa_{n-1}$
$\therefore\ a_n=\dfrac{p}{p-1}a_{n-1}$ $(p\neq 1)$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. (참)
ㄷ. $p=\dfrac{2}{3}$이면 $\dfrac{p}{p-1}=-2<-1$이므로
등비수열 $\{a_n\}$은 발산한다. (거짓)

29. **[출제의도] 등비수열의 합과 수열의 극한을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

정사각형의 넓이를 a^2이라 하면 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로
$a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})$
$=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\dfrac{3^n-1}{3-1}=\dfrac{4-\sqrt{3}}{8}(3^n-1)$
$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}(4-\sqrt{3})\cdot\dfrac{3^n-1}{3^n}=4-\sqrt{3}$

30. **[출제의도] 주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

나머지 빈 칸을 주어진 규칙에 따라 채워보면 각 행의

수들은 다음과 같은 규칙대로 나열됨을 알 수 있다.

제 2행: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),\cdots,(50,50)$

제 3행: $(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),\cdots,(50,0)$

제 4행: $(1,1,1,1),(2,2,2,2),\cdots,(25,25,25,25)$

제 5행: $(1,0,1,0),(2,0,2,0),\cdots,(25,0,25,0)$

따라서 구하는 제 5행의 100개의 수들의 합은

$$\sum_{n=1}^{25} 2n = 25 \times 26 = 650$$