

# 2008학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## • 수리 영역 •

### 수리'가'형 정답

1	③	2	④	3	③	4	①	5	③
6	②	7	④	8	⑤	9	②	10	④
11	⑤	12	⑤	13	②	14	③	15	⑤
16	⑤	17	①	18	32	19	672	20	55
21	128	22	24	23	310	24	81	25	79
26	①	27	①	28	②	29	④	30	36

### 해설

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt[3]{(8 \times 27)^2} = \sqrt[3]{6^6} = \sqrt[3]{36^3} = 36$$

2. [출제의도] 역행렬을 이해하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$A^{-1}X=B \text{의 양변의 왼쪽에 행렬 } A \text{ 를 곱하면}$$

$$AA^{-1}X=AB$$

$$\therefore X=AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 14이다.

3. [출제의도] 이항분포의 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 20$$

$$\therefore n=90$$

4. [출제의도] 서로 독립인 두 사건의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\text{두 사건 } A, B \text{는 서로 독립이므로}$$

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$$

$$\therefore P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\text{또, } P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{9}{16}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

5. [출제의도] 연립방정식과 행렬을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\text{연립방정식 } \begin{pmatrix} 2-k & 3 \\ 2 & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{이}$$

$x=0, y=0$  이외의 해를 가지려면

$$(2-k)(1-k) - 3 \cdot 2 = 0$$

$$\text{즉, } k^2 - 3k - 4 = 0 \therefore k = -1, 4$$

따라서 구하는 실수 k의 값의 합은 3이다.

6. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2}$$

$$n < \sqrt{n^2+1} < n+1$$

$$\therefore a_n = n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\sqrt{n^2+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

7. [출제의도] 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

5는 반드시 포함되어야 하므로 5를 뽑는 경우의 수는 1(가지)

5를 제외한 8개의 자연수 중에서 나머지 두 수를 뽑을 때 적어도 하나의 짝수를 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_2 - {}_4C_2 = 28 - 6 = 22(\text{가지})$$

뽑힌 3개의 자연수를 이용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$3! = 6(\text{개})$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$1 \times 22 \times 6 = 132(\text{개})$$

8. [출제의도] 로그의 대소관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\because 0 < a < 1, b > 1 \text{ 이므로 } \log_a b < \log_a 1 = 0$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \log_a b < 0 \text{ (참)}$$

$$\because 0 < a < 1, b < \frac{1}{a} \text{ 이므로 } \log_a b > \log_a \frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \log_a b > -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } -\frac{1}{2} < A < 0 \text{ 이므로 } B = \frac{1}{A} < -2$$

$$\therefore A > B \text{ (참)}$$

$$\text{c. } A = \frac{1}{B} \text{ 이므로 } AB = 1$$

$$\therefore \log_{ab} |A| + \log_{ab} |B| = \log_{ab} |AB| = \log_{ab} 1 = 0 \text{ (참)}$$

9. [출제의도] 등비수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4$$

$$= a(1 + r + r^2 + r^3 + r^4) = \frac{31}{2}$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4 = a^5 r^{10} = 32$$

$$\therefore ar^2 = 2$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \frac{1}{ar^3} + \frac{1}{ar^4}$$

$$= \frac{1}{ar^4} (1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$$

$$= \frac{a}{(ar^2)^2} (1 + r + r^2 + r^3 + r^4) = \frac{31}{8}$$

10. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$(a, b) \in A, (c, d) \in B \text{ 이므로}$$

$$3^a = b, \log_3 c = d \text{ 이다.}$$

$$\because (\text{반례}) a=1, b=3 \text{ 일 때 } (1, 3) \in A \text{ 이지만}$$

$$(1^3, 3 \cdot 3) \notin A \text{ 이다. (거짓)}$$

$$\text{c. } 3^a = b \text{ 즉, } \log_3 b = a$$

$$\therefore (b, a) \in B \text{ (참)}$$

$$\text{d. } 3^a = b, \log_3 c = d \text{ 즉, } 3^d = c \text{ 가 성립하므로}$$

$$3^{a+d} = bc$$

$$\therefore (a+d, bc) \in A \text{ (참)}$$

11. [출제의도] 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는

문제이다.

$$\because a_6 = a_3 + 1 = (a_1 - 1) + 1 = 1 \text{ (참)}$$

$$\because n = 2^k \text{ 이면}$$

$$a_n = a_{2^k} = a_{2^{k-1}} + 1 = a_{2^{k-2}} + 2 = \dots$$

$$= a_{2^0} + k = k + 1 \text{ (참)}$$

$$\text{c. } a_{2n} = a_n + 1, a_{2n+1} = a_n - 1 \text{ 이므로}$$

$$a_{2n} - a_{2n+1} = 2 \text{ 가 성립한다.}$$

$$\therefore a_{2^k} - a_{2^{k+1}} = 2$$

따라서  $n = 2^k + 1$  일 때,  $\because$  을 이용하면

$$a_n = a_{2^k+1} = a_{2^k} - 2 = (k+1) - 2 = k-1 \text{ (참)}$$

12. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\because N_{15} = 1515 \dots 15 \text{ 는 } 2 \times 15 \text{ 자리의 수이므로}$$

$$\log N_{15} \text{의 지표는 } 30 - 1 = 29 \text{ 이다.}$$

$$\therefore p(15) = 29 \text{ (거짓)}$$

$$\because q(n) = 0 \text{ 이면 } \log N_n = p(n) \text{ (정수)}$$

$$\text{즉, } N_n = 10^{p(n)} \text{ 이다.}$$

한편,  $q(1) = 0$  이고,  $n \neq 1$  이면  $N_n$  은  $10^k$  의 꼴이

될 수 없다. 즉,  $q(n) \neq 0$

따라서 n은 1뿐이다. (참)

$$\text{c. } n = 10^k \text{ 은 } (k+1) \text{ 자리의 수이고}$$

$$N_n \text{ 은 } n(k+1) \text{ 자리의 수이므로}$$

$$p(n) = nk + n - 1$$

이때  $n-1 = 10^k - 1$  은 k 자리의 수이고

$$N_{n-1} \text{ 은 } (n-1)k \text{ 자리의 수이므로}$$

$$p(n-1) = nk - k - 1$$

$$\therefore p(n) - p(n-1) = n + k \text{ (참)}$$

13. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(가) : 1$$

$$(나) : (k+1)a_k - k$$

$$(다) : \frac{1}{k+1}$$

14. [출제의도] 이산확률변수의 평균과 분산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\because P(Y=k) = P(X=10-k) \text{ 이므로}$$

$$P(5 \leq Y \leq 7) = P(3 \leq X \leq 5) \text{ (참)}$$

$$\because \text{확률변수 } X \text{ 는 이항분포 } B\left(10, \frac{1}{2}\right) \text{ 을 따르므로}$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

$$Y = 10 - X \text{ 에서}$$

$$E(Y) = E(10 - X) = 10 - E(X) = 5$$

$$\therefore E(Y) = E(X) \text{ (참)}$$

$$\text{c. } Y = 10 - X \text{ 에서}$$

$$V(Y) = V(10 - X) = V(X)$$

$$\therefore V(Y) = V(X) \text{ (거짓)}$$

15. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

임의의 두 점을  $P(a, b), Q(c, d)$  라 하면,

$$M_P = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, M_Q = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$\because M_P M_Q = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -ad - bc & ac - bd \end{pmatrix}$$

에 대응하는 점  $R(ac - bd, ad + bc)$  가 존재한다. (참)

$$\therefore M_Q M_P = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\therefore M_P M_Q = M_Q M_P \text{ (참)}$$

ㄷ. 점 P가 원점이 아니면  $a^2 + b^2 \neq 0$  이므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\text{따라서 } M_P M_S = E \text{ 인 점 } S \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

가 존재한다. (참)

16. [출제의도] 등비수열의 합을 이해하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A 지역의 연간 휘발유 소비량이 전년도의  $r$  배로 감소한다고 하면

2007년의 휘발유 소비량은  $a$  톤,

2008년의 휘발유 소비량은  $ar$  톤,  $\dots$ ,

2015년의 휘발유 소비량은  $ar^8$  톤으로 놓을 수 있다.

이때 2015년의 휘발유 소비량은  $\frac{1}{3}a$  톤이므로

$$ar^8 = \frac{1}{3}a, r^8 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore r = \sqrt[8]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[8]{3}} = \frac{1}{1.15} = \frac{20}{23}$$

따라서 16년 동안 사용되는 휘발유 전체의 양은

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{15}$$

$$= \frac{a(1-r^{16})}{1-r} = \frac{a(1-\frac{1}{9})}{1-\frac{20}{23}} = \frac{184}{27}a \text{ (톤)}$$

17. [출제의도] 무한등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$S_1 = \pi - \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{\pi+1}{2}$$

원  $C_n$ 의 지름의 길이를  $l_n$ 이라 하면

$$l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} l_n \text{ 이므로}$$

$$S_{n+1} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 S_n = \frac{1}{2} S_n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi+1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi+1$$

18. [출제의도] 로그방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2 x - 6 = t$ 로 치환하면  $\log_2 x = t+6$  이므로

$$(\log_2 x - 6)^2 + \log_2 x^2 - 11 = t^2 + 2(t+6) - 11 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2 = 0$$

$$\therefore t = -1$$

이때  $\log_2 x = 5$  이므로

$$x = 2^5 = 32$$

19. [출제의도] 이항계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left( 2x - \frac{1}{x} \right)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{7C_r} (2x)^r \left( -\frac{1}{x} \right)^{7-r} = {}_{7C_r} \times 2^r \times (-1)^{7-r} \times x^{2r-7}$$

이므로  $2r-7=3$ 에서  $r=5$

$$\text{따라서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_{7C_5} \times 2^5 \times (-1)^2 = 672$$

20. [출제의도] 등차수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \frac{10(b_1 + b_{10})}{2}$$

$$= 5\{(a_1 + b_1) + (a_{10} + b_{10})\} = 500$$

$$\therefore a_{10} + b_{10} = 55$$

21. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$4^a > 0, 2^b > 0$  이므로

$$4^a + 2^b \geq 2\sqrt{4^a \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{2a+b}} = 2\sqrt{2^{12}} = 128$$

(단, 등호는  $a=3, b=6$ 일 때 성립한다.)

22. [출제의도] 상용로그의 값과  $\sum$ 의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

정의에 따라  $[\log_{10} S_n]$ 는  $\log_{10} S_n$ 의 지표와 같다.

$$S_1 = 1, S_2 = 1+2=3, S_3 = 1+2+3=6 \text{ 이므로}$$

$$[\log_{10} S_1] = [\log_{10} S_2] = [\log_{10} S_3] = 0$$

$$S_4 = 1+2+3+4=10,$$

$$S_{13} = 1+2+3+\dots+13=91 \text{ 이므로}$$

$$[\log_{10} S_4] = [\log_{10} S_5] = \dots = [\log_{10} S_{13}] = 1$$

$$S_{14} = 1+2+3+\dots+14=105,$$

$$S_{20} = 1+2+3+\dots+20=210 \text{ 이므로}$$

$$[\log_{10} S_{14}] = [\log_{10} S_{15}] = \dots = [\log_{10} S_{20}] = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} [\log_{10} S_n] = 0 \times 3 + 1 \times 10 + 2 \times 7 = 24$$

23. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$100 \leq A < 1000, 900 < B < 1000$ 이고,

$\log B$ 의 가수가  $\log A$ 의 가수의 2배이므로

$$\log A = 2 + \alpha, \log B = 2 + 2\alpha \left( 0 \leq \alpha < \frac{1}{2} \right)$$

$$2\log A - \log B = \log \frac{A^2}{B} = 2 \text{ 이므로 } \frac{A^2}{B} = 100$$

$$\therefore 100B = A^2$$

$A$ 는 10의 배수이므로  $A = 10C$  ( $C$ 는 자연수)라

$$\text{하면 } 100B = (10C)^2 = 100C^2 \therefore B = C^2$$

따라서  $B$ 는 900보다 큰 세 자리의 수이면서 완전제곱수이다.

$$30^2 = 900, 31^2 = 961, 32^2 = 1024 \text{ 이므로}$$

$$B = 31^2, A^2 = 100B = 10^2 \cdot 31^2 = (310)^2$$

$$\therefore A = 310$$

24. [출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x, y$ 에 관한 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} 0.6x + 0.3y = 45 \\ 0.5x + 0.4y = 42 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 450 \\ 5x + 4y = 420 \end{cases}$$

이것을 행렬을 이용하여 나타내면

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 420 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = 4, b = -5$$

$$\therefore (a-b)^2 = (4+5)^2 = 81$$

25. [출제의도] 독립시행의 확률을 구할 수 있는가를

묻는 문제이다.

4개의 동전을 던질 때, 앞면과 뒷면이 각각 2개씩 나올 확률은

$${}_4C_2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\left( 1 - \frac{3}{8} \right) \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

$$\therefore p+q = 79$$

26. [출제의도] 무한급수의 뜻을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$n \geq 2$ 일 때  $S_n - a_n = S_{n-1}$ 이므로

$$S_n - a_n = S_{n-1} = \frac{n+3}{n+2} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 1$$

27. [출제의도] 조건부확률을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

진서가 던진 주사위가 홀수인 눈이 나오는 사건을  $A$ , 진서가 이기는 사건을  $B$ 라 하면 구하는 확률은  $P(B|A)$ 이다.

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

28. [출제의도] 지수함수의 그래프와 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

곡선  $y = 3^x$ 을  $x$ 축의 방향으로  $b_k$ 만큼 평행이동시킨 곡선  $y = 3^{x-b_k}$ 이 점  $(k, 2)$ 를 지난다고 하면

$$2 = 3^{k-b_k} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 3^{-b_k} = \frac{2}{3^k}$$

이때 곡선  $y = 3^{x-b_k}$ 의  $y$ 절편은  $3^{-b_k}$ 이므로

$$a_k = 3^{-b_k} = \frac{2}{3^k} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^k$$

$$= \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

29. [출제의도] 표본평균의 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

제품  $A$ 의 무게를 확률변수  $X$ 라 하면

$X$ 는 정규분포  $N(120, 10^2)$ 을 따르므로

$$p_1 = P(X \geq 130) = P\left( Z \geq \frac{130-120}{10} \right)$$

$$= P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.1587$$

한편, 크기가 4인 표본의 표본평균  $\bar{X}$ 는 정규분포

$N(120, 5^2)$ 을 따르므로

$$p_2 = P(\bar{X} \geq 130) = P\left( Z \geq \frac{130-120}{5} \right)$$

$$= P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.0228$$

$$\therefore p_1 - p_2 = 0.1359$$

30. [출제의도] 순열과 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

- (i) A, B가 2인용 소파에 앉는 경우의 수는  $2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$ (가지)  
(ii) A, B가 3인용 소파에 앉는 경우의 수는  $2 \times 2! \times 3! = 24$ (가지)  
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는  $12 + 24 = 36$ (가지)

수리'나'형 정답

1	㉓	2	㉔	3	㉕	4	㉖	5	㉗
6	㉘	7	㉙	8	㉚	9	㉛	10	㉜
11	㉝	12	㉞	13	㉟	14	㊱	15	㊲
16	㊳	17	㊴	18	48	19	52	20	55
21	128	22	24	23	310	24	81	25	60
26	㉔	27	㉔	28	㉓	29	㉓	30	650

해설

1. '가'형과 동일  
2. '가'형과 동일  
3. [출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

4. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$4^a = 3 - 2\sqrt{2}, \quad 2^a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$2^{-a} = \frac{1}{2^a} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore 2^a + 2^{-a} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}$$

5. '가'형과 동일  
6. '가'형과 동일  
7. [출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$A(A+2E) = E \text{에서 } A^2 + 2A = E \text{이므로}$$

$$(A-E)(A+3E) = -2E$$

$$-\frac{1}{2}(A+3E)(A-E) = E$$

$$\therefore (A-E)^{-1} = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}E$$

$$\therefore p+q = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

8. [출제의도] 행렬의 연산과 역행렬의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이라 하면  $AB = A$ 가 성립하지만  $B \neq E$ 이다. (거짓)

ㄴ.  $A^2 - A + E = O$ 의 양변에  $A + E$ 를 곱하면  $(A+E)(A^2 - A + E) = O, A^3 + E = O$   
 $\therefore A^3 = -E$  (참)

ㄷ.  $A^2$ 의 역행렬  $B$ 가 존재하면  $A^2B = E$ 이므로  $A^3(AB^2) = A^4B^2 = A^2(A^2B)B = A^2EB = A^2B = E$   
 $\therefore (A^3)^{-1} = AB^2$   
따라서  $A^3$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

9. '가'형과 동일

10. [출제의도] 자연수의 합을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.  
주어진 수열은 3의 배수를 함께 생각하면 1, 2, ㉓, 4, 5, ㉔, ..., 44, ㉕

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{45} k - \sum_{k=1}^{15} 3k = \frac{45 \times 46}{2} - 3 \times \frac{15 \times 16}{2} = 675$$

11. '가'형과 동일

12. '가'형과 동일

13. '가'형과 동일

14. [출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{pmatrix} x-2 & -y \\ y-2 & x+2 \end{pmatrix} \text{의 역행렬이 존재하지 않으므로}$$

$$(x-2)(x+2) + y(y-2) = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 5$$

따라서 점  $(x, y)$ 가 나타내는 도형은 중심이  $(0, 1)$ 이고 반지름의 길이가  $\sqrt{5}$ 인 원이다.

15. '가'형과 동일

16. '가'형과 동일

17. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

도형  $S_n$ 의 넓이는 12개의 합동인 작은 정삼각형의 넓이의 합과 같고, 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 2이므로  $S_n$ 의 넓이는

$$12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 12\sqrt{3}$$

또한,  $S_n$ 과  $S_{n+1}$ 은 닮은 도형이고 닮음비가 2:1이므로 넓이의 비는 4:1이다.  
따라서  $S_{10}$ 의 넓이는

$$12\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 = 3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$$
이다.

18. [출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라고 하면  $a_1 a_2 = 6$ 에서  $a^2 r = 6 \dots \textcircled{1}$   
 $a_3 a_4 = 12$ 에서  $a^2 r^5 = 12 \dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서  $r^4 = 2$   
 $\therefore a_7 a_8 = ar^6 \cdot ar^7 = a^2 r^{13} = a^2 r^5 \cdot (r^4)^2 = 12 \times 2^2 = 48$

19. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(A+B)^2 = (A^2 + B^2) + (AB + BA)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬  $(A+B)^{100}$ 의 모든 성분의 합은 52이다.  
[참고]  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 인 경우 성립.

20. '가'형과 동일

21. '가'형과 동일

22. '가'형과 동일

23. '가'형과 동일

24. '가'형과 동일

25. [출제의도] 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

5개의 부채꼴의 넓이를 작은 것부터 차례로  $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$  ( $d > 0$ )라 하면 5개의 부채꼴의 넓이의 합은 원의 넓이이므로

$$5a = 15^2 \pi \quad \therefore a = 45\pi$$

또, 주어진 조건으로부터

$$(a+2d) = 2(a-2d) \text{에서 } d = \frac{a}{6} = \frac{15\pi}{2}$$

따라서 가장 큰 부채꼴의 넓이는

$$a+2d = 45\pi + 2 \cdot \frac{15}{2} \pi = 60\pi \quad \therefore k = 60$$

26. [출제의도] 무한등비수열의 수렴 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수열이 수렴할 조건은

$$-1 < -\sin \frac{k\pi}{4} \leq 1, \quad -1 \leq \sin \frac{k\pi}{4} < 1$$

따라서  $\sin \frac{k\pi}{4} = 1$ 인 10이하의 자연수  $k$ 는 2, 10이므로 구하는 자연수의 개수는 8(개)이다.

27. [출제의도] 지수법칙을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$3^{x+1} - 3^x = 2 \cdot 3^x = a \quad \therefore 3^x = \frac{a}{2}$$

$$2^{x+1} + 2^x = 3 \cdot 2^x = b \quad \therefore 2^x = \frac{b}{3}$$

$$\therefore 12^x = 2^{2x} \times 3^x = \frac{ab^2}{18}$$

28. [출제의도] 등비수열과 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.  $S_1 = a_1$ 이므로  $pa_1 + 1 = a_1$   
 $\therefore a_1 = \frac{1}{1-p}$  (참)

ㄴ.  $n \geq 2$ 일 때,  
 $a_n = S_n - S_{n-1}$   
 $= (pa_n + 1) - (pa_{n-1} + 1) = pa_n - pa_{n-1}$   
 $\therefore a_n = \frac{p}{p-1} a_{n-1} \quad (p \neq 1)$   
따라서 수열  $\{a_n\}$ 은 등비수열이다. (참)

ㄷ.  $p = \frac{2}{3}$ 이면  $\frac{p}{p-1} = -2 < -1$ 이므로 등비수열  $\{a_n\}$ 은 발산한다. (거짓)

29. [출제의도] 등비수열의 합과 수열의 극한을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정삼각형의 넓이를  $a^2$ 이라 하면 정삼각형의 넓이는  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ 이므로

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1})$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{4 - \sqrt{3}}{8} (3^n - 1)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - \sqrt{3}) \cdot \frac{3^n - 1}{3^n} = 4 - \sqrt{3}$$

30. [출제의도] 주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

나머지 빈 칸을 주어진 규칙에 따라 채워보면 각 행의

수들은 다음과 같은 규칙대로 나열됨을 알 수 있다.

제 2행:  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), \dots, (50, 50)$

제 3행:  $(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), \dots, (50, 0)$

제 4행:  $(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), \dots, (25, 25, 25, 25)$

제 5행:  $(1, 0, 1, 0), (2, 0, 2, 0), \dots, (25, 0, 25, 0)$

따라서 구하는 제 5행의 100개의 수들의 합은

$$\sum_{n=1}^{25} 2n = 25 \times 26 = 650$$