2008년도 9월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	2	①	3	②	4	①	5	⑤	6	④
7	③	8	①	9	①	10	③	11	④	12	⑤
13	②	14	⑤	15	②	16	⑤	17	③	18	⑤
19	③	20	②	21	④	22	16	23	50	24	125
25	80	26	16	27	27	28	64	29	208	30	40

해 설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2(\sqrt{5}+1)+\log_2(\sqrt{5}-1)$

$=\log_2\{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\} =\log_2 4=2$

2. [출제의도] 역행렬을 구하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}$이므로

$A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2\\1&1\end{pmatrix}$

이다. 따라서 행렬 $A^{-1}B$의 (1, 1)성분은 -3이다.

3. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_4 = S_4 - S_3$

$=(4^2+3\cdot4)-(3^2+3\cdot3)=10$

4. [출제의도] 등차수열의 합을 구하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=\sum_{k=1}^{n}(n+k) =n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}$

5. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항이 1이고 공차가 3이므로 $a_n=3n-2$ 이다.

$10<a_n<50,\quad 10<3n-2<50$

$4<n<\frac{52}{3}$

자연수인 n은 5, 6, …, 17의 13개이다.

6. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{a+\frac{b}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=a & (x>1)\\[2mm] \dfrac{a+b+1}{2} & (x=1)\\[2mm] \lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^n+bx+1}{x^n+1}=bx+1 & (0<x<1)\end{cases}$$

$f(\sqrt{2}+1)+f(\sqrt{2}-1)=a+b(\sqrt{2}-1)+1=2+\sqrt{2}$

a, b가 유리수이므로

$a-b+1=2,\ b=1$이다.

따라서 $a=2,\ b=1$이다.

$\therefore a+b=3$

7. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 주어진 수열에서 $a_{2n}=2n-1$

$a_{100}=99$ ∴ 참

ㄴ. $S_{2n-1}=2\times\{1+3+\cdots+(2n-1)\}-(2n-1)$

$=2n^2-2n+1$

따라서 $S_{99}=2\cdot50^2-2\cdot50+1=4901$이다.

∴ 거짓

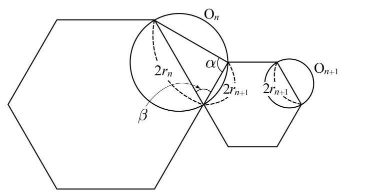
ㄷ. 1보다 큰 홀수 k에 대하여 $k+1$, $k-1$이 모두 짝수이고 $S_{2n}=2n^2$이다. 따라서

$S_{k+1}=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^2$이고 $S_{k-1}=2\left(\frac{k-1}{2}\right)^2$이므로

$S_{k+1}-S_{k-1}=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^2-2\left(\frac{k-1}{2}\right)^2=2k$이다.

∴ 참

8. [출제의도] 도형과 관련된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 n번째 원 O_n의 지름을 $2r_n$, $n+1$번째 원 O_{n+1}의 지름을 $2r_{n+1}$이라 할 때,

α는 지름에 대한 원주각이므로 90°이고 β는 정육각형의 외각이므로 60°이다.

따라서 $\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1}{2}$, $r_1=4$이다.

$r_n=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

그런데 $l_n=2\pi r_n=8\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{\infty}l_k=\sum_{k=1}^{\infty}8\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{8\pi}{1-\frac{1}{2}}=16\pi$

9. [출제의도] log2가 무리수임을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

log2가 유리수라고 가정하자.

$\log2=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 놓으면

$0<\log2<1$이므로 $m>n$이다. ⇐ (가)

$\log2=\frac{n}{m} \Leftrightarrow 10^{\frac{n}{m}}=2$

양변을 m제곱하면 $2^m=10^n$

양변을 2^n으로 나누면 $2^{m-n}=5^n$ ⇐ (나)

이때 $m-n>0$ 이므로

2^{m-n}은 짝수이고 ⇐ (다)

5^n은 홀수가 되어 모순이다.

따라서 log2는 무리수이다.

10. [출제의도] 상용로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(3◈30)+\left(5◈\frac{1}{50}\right)$

$=(2^3+[\log30])+\left(2^5+\left[\log\frac{1}{50}\right]\right)$

$=(8+1)+(32-2) =39$

11. [출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2+AB=A(A+B)=E$ ⋯ ㉠

$A^{-1}=A+B$ ⇐ (가)

$(A+B)A=A^{-1}A$

$A^2+BA=E$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $AB=BA$ ⇐ (나)

또, $B^2=E$이므로

$A^2+AB=B^2$

$A^2+AB-2B^2=-B^2=-E$

$(A+2B)(A-B)=-E$

∴ $(B-A)^{-1}=A+2B$ ⇐ (다)

12. [출제의도] 행렬의 연산과 역행렬에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=E$ 이면

$A+B=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b&-a\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&b-a\\-b+a&a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

이므로 $a+b=1,\ a-b=0$

$\therefore a=b=\frac{1}{2}$

$A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}b&-a\\a&b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

이므로

$AB=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ (AB)^{-1}=\left(\frac{1}{2}E\right)^{-1}=2E=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

따라서 $(AB)^{-1}$의 모든 성분의 합은 4이다.

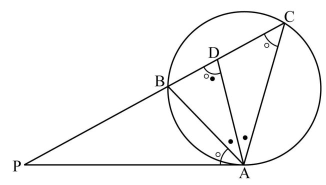
13. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 역행렬이 존재하는가를 판단하는 문제이다.

원의 성질에 의하여 $a^2=bc$이다.

또, $\angle\mathrm{PCA}=\angle\mathrm{PAB}$, $\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BAD}$이므로

$\angle\mathrm{PDA}=\angle\mathrm{PCA}+\angle\mathrm{CAD}$

$=\angle\mathrm{PAB}+\angle\mathrm{BAD} =\angle\mathrm{PAD}$



따라서 $\triangle\mathrm{PAD}$는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PD}}$이다.

즉, $a=d$

따라서 $a^2=bc$에서 $ad=bc$이므로 $ad-bc=0$이다.

ㄱ. T의 역행렬은 존재하지 않는다. ∴ 거짓

ㄴ. $T+E=\begin{pmatrix}a+1&b\\c&d+1\end{pmatrix}$에서

$(a+1)(d+1)-bc=ad-bc+(a+d)+1$

$=(a+d)+1\neq0$

이므로 항상 역행렬이 존재한다. ∴ 참

ㄷ. $T-E=\begin{pmatrix}a-1&b\\c&d-1\end{pmatrix}$에서

$(a-1)(d-1)-bc=ad-bc-(a+d)+1$

$=-(a+d)+1$

이므로 $a+d=1$일 때 역행렬이 존재하지 않는다.

∴ 거짓

14. [출제의도] 등비중항을 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수영장의 바닥으로부터 높이 1 m 까지의 부피는

$20\,\mathrm{m}^3$ 이므로 $a=\frac{20}{20}=1$ 이다.

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=1\cdot c$ ⋯ ㉠

문제조건에서 수영장을 가득 채우는데 걸린 시간이 21 시간이므로

$1+b+c=21$

$c=20-b$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$b^2+b-20=0$

$(b+5)(b-4)=0$

$\therefore b=4\ (\because b>0),\ c=16$

$20x=16\times20$

$\therefore x=16\,(\mathrm{m})$

15. [출제의도] 무한급수의 수렴과 발산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ ∴ 참

ㄴ. $\sum_{n=1}^{99}a_n=\sum_{n=1}^{99}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$ ∴ 참

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$= \lim_{n \to \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{1}) = \infty$ ∴ 거짓

16. **[출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$[OH^-] = 10^{-14} \times \frac{1}{[H^+]}$ 에서 $[H^+] = 10^{-14} \times \frac{1}{[OH^-]}$

$[OH^-] = 10^{-4}$이므로

$[H^+] = 10^{-14} \times \frac{1}{10^{-4}} = 10^{-10}$

$\therefore pH = -\log[H^+] = -\log 10^{-10} = 10$

17. **[출제의도] 상용로그의 지표의 성질을 이해하는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $2^{10} = 1024$로 네 자리 수이므로 지표는 3이다.

$\therefore f(10) = 3$ ∴ 참

ㄴ. $\log 2^n = n\log 2 = f(n) + \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$

$\log 5^n = n \log 5 = g(n) + \beta$ $(0 < \beta < 1)$에서

$\log 2^n + \log 5^n = f(n) + g(n) + \alpha + \beta$

$\therefore n = f(n) + g(n) + \alpha + \beta$

여기서 n, $f(n)$, $g(n)$ 이 모두 정수이므로 $\alpha + \beta$도 정수이다. 즉, $\alpha + \beta = 1$ 이다.

$\therefore f(n) + g(n) = n - 1$ ∴ 거짓

ㄷ. ㄴ에서 $f(n) + g(n) = n - 1$ 이므로

$f(n) + 1 + g(n) + 1 = n - 1 + 2 = n + 1$ 이다.

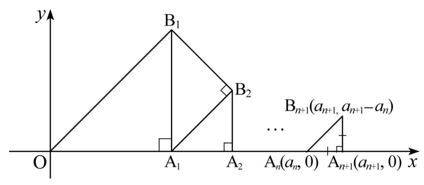
따라서 2^n 의 자릿수와 5^n 의 자릿수의 합은 10^n 의 자릿수인 $n+1$ 과 같다. ∴ 참

18. **[출제의도] 좌표를 이용하여 계차수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

점 $A_n(a_n, 0)$ 이라 하면,

$A_{n+1}(a_{n+1}, 0)$ 이고 $\overline{A_n A_{n+1}} = \overline{A_{n+1} B_{n+1}}$ 이므로

$B_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+1} - a_n)$ 이다.



$A_{10}(a_{10}, 0)$, $A_{11}(a_{11}, 0)$, $B_{11}(a_{11}, a_{11} - a_{10})$ 이고 삼각형 $A_{10}A_{11}B_{11}$ 의 무게중심 $G(a, b)$ 의 좌표는 각각 다음과 같다.

$a = \frac{a_{10} + a_{11} + a_{11}}{3}$, $b = \frac{a_{11} - a_{10}}{3}$ 이므로

$a + b = a_{11}$ 이다.

한편, $\overline{A_1 A_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{A_1 B_2} = \frac{1}{2} \overline{A_1 B_1} = \frac{1}{2}$ 이고

$\overline{A_n A_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_{n-1} A_n}$ (단, $A_0 = O$)이므로

$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$a + b = a_{11} = 1 + \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{11}-1}{2^{10}}$

19. **[출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

500GB로 표시된 하드디스크를 컴퓨터가 인식하는 용량을 x GB라 하면

$\log x = \log 500 \times \frac{1000^3}{1024^3}$

$= \log \frac{10^{12}}{2^{31}} = 12 - 31 \cdot \log 2$

$= 12 - 9.331 = 2.699$

$= 2 + \log 4.67 = \log 467$

$\therefore x = 467$

20. **[출제의도] 순서도를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

a의 값이 홀수이면 1을 빼고 짝수이면 2로 나누므로 a와 n의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	23	22	11	10	5	4	2	1
n	0	0	1	2	3	4	5	6

따라서 인쇄되는 n의 값은 6이다.

21. **[출제의도] 등차수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\left[\frac{a}{n}\right] = 1$ 에서 A_n 의 원소는

$\frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \cdots, \frac{2n-1}{n}$ 이다.

$P_n = \frac{1}{n}\{n + (n+1) + \cdots + (2n-1)\}$

$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+2n-1)}{2} = \frac{3n-1}{2}$

$\sum_{k=1}^{20} P_k = \sum_{k=1}^{20} \frac{3k-1}{2} = \frac{1}{2}\left(3\sum_{k=1}^{20} k - 20\right)$

$= \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 20\right) = 305$

22. **[출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^{n+1} - 3^n}{4^{n-1} + 2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{4 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 16$$

23. **[출제의도] 무한급수의 정의를 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

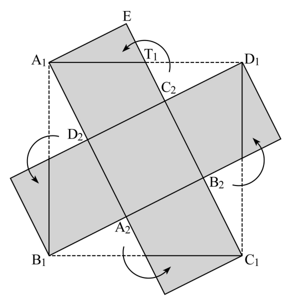
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{4n^2 - 1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{100}{(2k-1)(2k+1)}$

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} 50\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= \lim_{n \to \infty} 50\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 50$

24. **[출제의도] 도형과 관련된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

그림에서 직각삼각형 A_1ET_1과 직각삼각형 $D_1C_2T_1$이 합동이므로 직각삼각형 $A_1D_2D_1$의 넓이와 정사각형 $A_1D_2C_2E$의 넓이는 같다.



마찬가지로 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이는 합동인 5개의 정사각형의 넓이의 합과 같음을 알 수 있다.

따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 $\frac{1}{5}$이므로 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이 S_n은 첫째항이 100이고 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열을 이룬다.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 100\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{100}{1 - \frac{1}{5}} = 125$

25. **[출제의도] 행렬의 연산법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 이므로

$A \cdot A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

그런데 $A^2 = -A + 2E$ 이므로

$(-A + 2E)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

따라서 $a = 1$, $b = -2$이므로 $100a + 10b = 80$이다.

26. **[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$A = 3A^{-1}$의 양변에 A를 곱하여 $A^2 = 3E$

$A^2 = \begin{pmatrix}a & 2\\b & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 2\\b & -5\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}a^2 + 2b & 2a - 10\\ab - 5b & 2b + 25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$

따라서 $2a - 10 = 0$, $2b + 25 = 3$이므로

$a = 5$, $b = -11$이다.

$\therefore a - b = 16$

27. **[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 규칙성을 찾을 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$X = X(X + Y) = X^2 + XY = X^2$ 이므로

$X^3 = X^2X = X$, $X^4 = X^3X = X^2 = X$, $\cdots$

즉, $X^n = X$ (n은 자연수) ⋯ ㉠

마찬가지 방법으로 정리하면

$Y^n = Y$ (n은 자연수) ⋯ ㉡

또한 $X = X(X + Y) = (X + Y)X$

$\therefore XY = YX = O$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터

$A^3 = (3X + Y)^3$

$= 3^3X^3 + 3 \cdot 3X \cdot Y(3X + Y) + Y^3$

$= 3^3X + Y$

따라서 $a = 27$이다.

28. **[출제의도] 거듭제곱근의 뜻과 로그의 연산법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$x^4 = k\,(k > 0)$에서 k의 네 제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k}$ 이므로 $a = \sqrt[4]{k}$, $b = -\sqrt[4]{k}$이다.

$x^3 = k\,(k > 0)$에서 k의 세 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{k}$ 이므로 $c = \sqrt[3]{k}$이다.

$x^3 = -k\,(k > 0)$에서 $-k$의 세 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-k} = -\sqrt[3]{k}$ 이므로 $d = -\sqrt[3]{k}$이다.

$\log_2 \frac{c}{a} = \log_2 \frac{b}{d} + 1$에서

$\log_2 \frac{c}{a} - \log_2 \frac{b}{d} = 1$

$\log_2 \frac{cd}{ab} = 1$, $\frac{cd}{ab} = 2$

$\frac{cd}{ab} = \frac{\sqrt[3]{k}(-\sqrt[3]{k})}{\sqrt[4]{k}(-\sqrt[4]{k})} = \frac{\sqrt[3]{k^2}}{\sqrt[4]{k^2}}$

$= \frac{k^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{1}{2}}} = k^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{6}}$

따라서 $k^{\frac{1}{6}} = 2$이므로 $k = 2^6 = 64$이다.

29. **[출제의도] 약수와 배수를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

주어진 수열의 일반항(n 번째)을 a_n 이라 하면

$a_n = \frac{100 - n}{n}$ (단, $1 \leq n \leq 99$)이다.

$a_n = \frac{100 - n}{n} = \frac{100}{n} - 1$ 이므로

n 이 $100 = 2^2 5^2$ 의 약수일 때 $\frac{100}{n}$ 은 자연수가 된다. 따라서 자연수 a_n 의 총합은 다음과 같다.

$(1 + 2 + 2^2)(1 + 5 + 5^2) - 9 = 208$

30. **[출제의도] 연립방정식을 행렬로 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$3r_1 - r_2 = 13$, $5r_1 + r_2 = 27$이므로 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$

이므로

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$ 이다.

$a=1,\ b=3$이므로 $10(a+b)=40$이다.

수리'나'형 정답

1	④	2	①	3	④	4	②	5	①	6	③
7	⑤	8	①	9	①	10	③	11	④	12	⑤
13	②	14	②	15	④	16	⑤	17	③	18	⑤
19	③	20	③	21	②	22	90	23	10	24	78
25	80	26	16	27	27	28	64	29	12	30	40

해 설

1. '가'형과 동일

2. '가'형과 동일

3. **[출제의도] 로그의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

밑의 조건 : $a>0$, $a\neq1$ 이고 $b>0$, $b\neq1$

$\log_a 3=\frac{1}{2}$ 에서 $a^{\frac{1}{2}}=3 \quad \therefore\ a=9$

$\log_b 9=2$ 에서 $b^2=9 \quad \therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=12$

4. **[출제의도] 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$3^a=5$ 이므로 $5^b=(3^a)^b=3^{ab}=9$ 이다. $\quad \therefore\ ab=2$

5. **[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 상용로그의 가수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\log\frac{x^2}{y}=2\log x-\log y=2(k+2)-\left(2k+\frac{3}{4}\right)=3+\frac{1}{4}$

따라서 구하는 가수는 $\frac{1}{4}$ 이다.

6. **[출제의도] 행렬의 정의를 알고 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$a_{11}=\log_2 1+\log_2 1=0$, $a_{12}=2^{1-2}=\frac{1}{2}$

$a_{21}=2^{2-1}=2$, $a_{22}=\log_2 2+\log_2 2=2$

$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \therefore\ A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

모든 성분의 합은 11이다.

7. **[출제의도] 거듭제곱근의 대소를 비교할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

세 수 A, B, C를 각각 6제곱하면

$A^6=(\sqrt{5})^6=5^3=125$

$B^6=(\sqrt[3]{11})^6=11^2=121$

$C^6=(\sqrt{2\sqrt[3]{15}})^6=(\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{15})^6=2^3\cdot15=120$

이므로 $C<B<A$ 이다.

8. **[출제의도] 연립일차방정식을 행렬로 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.**

직선 AC의 방정식은 $y=-x+5$, 직선 BD의 방정식은 $y=x+1$이다.

두 대각선 AC, BD의 교점이 $\mathrm{P}(x, y)$이므로 x, y는 연립방정식

$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$

의 해이다. 따라서 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

이므로 $a=1$, $b=5$이다. $\quad \therefore\ a+b=6$

9. '가'형과 동일

10. '가'형과 동일

11. '가'형과 동일

12. '가'형과 동일

13. '가'형과 동일

14. **[출제의도] 행렬로 표현된 연립방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\begin{pmatrix} a-3 & -b \\ 1+a & b+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 무수히 많은 해를 갖기 위한 조건은 $(a-3)(b+2)+b(1+a)=0$이다.

$ab+a-b-3=0$, $(a-1)(b+1)=2$

그런데 a, b가 자연수이므로

$a-1=1$ 이고 $b+1=2$ 이다. $\quad \therefore\ a=2$, $b=1$

따라서 $a+b=3$ 이다.

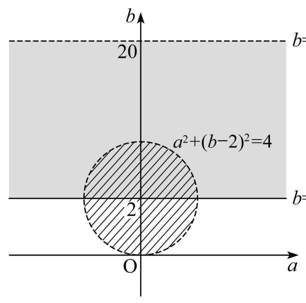
15. **[출제의도] 이차방정식의 근의 판별과 상용로그의 지표의 성질을 이용하여 영역의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(가)에서 이차방정식 $bx^2-2ax+4-b=0$이 서로 다른 두 허근을 갖기 위한 조건은

$\frac{D}{4}=(-a)^2-b(4-b)<0 \qquad \therefore a^2+(b-2)^2<4 \ \cdots$ ㉠

(나)에서 $\log 5b$ 의 지표가 1 이므로

$1\leqq\log 5b<2$, $10\leqq 5b<100$ 이다. $\therefore\ 2\leqq b<20 \ \cdots$ ㉡



㉠, ㉡를 동시에 만족하는 영역이 반원이므로 넓이는 2π 이다.

16. '가'형과 동일

17. '가'형과 동일

18. **[출제의도] 역행렬의 연산에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $AB+A+B=O$ 에서 $A(B+E)+B+E=E$

$(A+E)(B+E)=E \ \therefore (A+E)^{-1}=B+E$

따라서 $A+E$의 역행렬은 존재한다. $\quad \therefore$ 참

ㄴ. ㄱ에서 $(A+E)^{-1}=B+E$이고

$A^3=O$ 에서 $A^3+E=E$

$(A+E)(A^2-A+E)=E$

$(A+E)^{-1}=A^2-A+E$

$B+E=A^2-A+E \qquad \therefore B=A^2-A \qquad \therefore$ 참

ㄷ. 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면,

A^{-1} 이 존재하면 모순이다.

$\therefore A^{-1}$ 이 존재하지 않으므로 $ad-bc=0$ 이다.

$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}$

$=(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$=(a+d)A \qquad \cdots$ ㉠

가 성립한다. 따라서

$A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2A$

$A^3=O$이므로 $a+d=0$이거나 $A=O$이다.

$a+d=0$일 때 ㉠에서 $A^2=O$이고

$A=O$일 때 $A^2=O$이다.

따라서 $A^3=O$이면 $A^2=O$이다. $\qquad \therefore$ 참

19. '가'형과 동일

20. **[출제의도] 역행렬이 존재하는 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

행렬 $\begin{pmatrix} a-3 & a+1 \\ b-2 & t \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하려면

$(a-3)t-(a+1)(b-2)\neq0 \ \cdots$ ㉠

이다. 이 때, ㉠이 임의의 실수 t에 대하여 항상 성립하기위한 조건은

$a-3=0$ 이고 $(a+1)(b-2)\neq0$ 이다.

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 1)$, $(3,\ 3)$, $(3,\ 4)$이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 3이다.

21. **[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

x 가 세 자리의 자연수이므로

$\log x=2+\beta \ (0\leqq\beta<1)$라고 하자.

$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=1+\frac{\beta}{2}$ 에서

$0\leqq\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}$ 이므로 $\log\sqrt{x}$ 의 가수는 $\frac{\beta}{2}$ 이다.

$\log\sqrt[3]{x^2}=\frac{2}{3}\log x=\frac{4}{3}+\frac{2\beta}{3}=1+\frac{1}{3}+\frac{2\beta}{3}$

에서 $\frac{1}{3}\leqq\frac{1+2\beta}{3}<1$ 이므로

$\log\sqrt[3]{x^2}$ 의 가수는 $\frac{1+2\beta}{3}$ 이다.

$\log\sqrt{x}$ 와 $\log\sqrt[3]{x^2}$ 의 가수의 합이 1이면

$\frac{\beta}{2}+\frac{1+2\beta}{3}=1 \quad \therefore \beta=\frac{4}{7}$

$\log x^2=2\log x=4+\frac{8}{7}=5+\frac{1}{7}$ 이므로

$\log x^2$ 의 지표는 5 이고, 가수는 $\frac{1}{7}$ 이다.

따라서, $n=5$, $\alpha=\frac{1}{7}$ 이므로 $n\alpha=\frac{5}{7}$ 이다.

22. **[출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$25^{\frac{x}{2}}+625^{\frac{x}{2}}=5^x+5^{2x}=5^x+(5^x)^2=9+9^2=90$

23. **[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 규칙성을 찾을 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$A=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}=10\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$A^2=10^2\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=10^3\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $A^{10}=10^{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$N=3\cdot10^{10} \quad \therefore \log\frac{N}{3}=\log10^{10}=10$

24. **[출제의도] 거듭제곱근이 자연수가 되기 위한 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{6}{n}}$이 자연수이려면

$n=-1,\ -2, -3,\ -6$이 되어 집합 A의 자연수인 원소는 2^6, 2^3, 2^2, 2^1이다.

$\therefore 64+8+4+2=78$

25. '가'형과 동일

26. '가'형과 동일

27. '가'형과 동일

28. '가'형과 동일

29. **[출제의도] 행렬의 연산과 이차함수의 최솟값을 이용하여 행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$A^2=2aA$

$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab \\ 2ab & 2ac \end{pmatrix}$

$a^2+b^2=2a^2$, $ab+bc=2ab$

$a^2 = b^2$, $bc = ab$

a, b, c가 양수이므로 $a = b = c$이다.

$f(x) = ax^2 + ax + a = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a$

최솟값이 3이므로 $a = 4$이다.

$\therefore a + b + c = 12$

30. '가'형과 동일