

5. 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.
 부등식 $10 < a_n < 50$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는? [3점]
- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

6. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수
- $$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx + 1}{x^n + 1} \quad (a, b \text{ 는 유리수})$$
- 이 $f(\sqrt{2}+1) + f(\sqrt{2}-1) = 2 + \sqrt{2}$ 를 만족할 때, $a+b$ 의 값은? [3점]
- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

7. 다음과 같이 홀수를 작은 것부터 차례로 두 번씩 나열한 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, ...

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

— < 보 기 > —

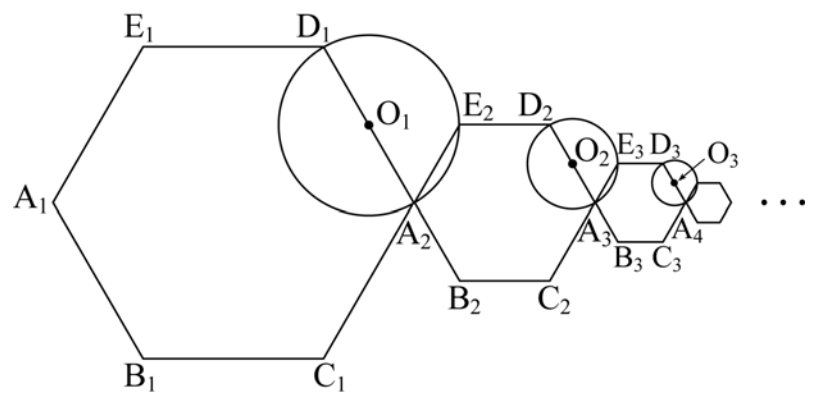
ㄱ. $a_{100} = 99$

ㄴ. $S_{99} = 5000$

ㄷ. 1보다 큰 홀수 k 에 대하여 $S_{k+1} - S_{k-1} = 2k$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정육각형 $A_1B_1C_1A_2D_1E_1$ 의 변 A_2D_1 을 지름으로 하는 원 O_1 을 그린다.
 원 O_1 과 선분 C_1A_2 의 연장선의 교점을 E_2 라 할 때, 선분 A_2E_2 를 한 변으로 하는 정육각형 $A_2B_2C_2A_3D_2E_2$ 를 그리고 변 A_3D_2 를 지름으로 하는 원 O_2 를 그린다.
 원 O_2 와 선분 C_2A_3 의 연장선의 교점을 E_3 이라 할 때, 선분 A_3E_3 을 한 변으로 하는 정육각형 $A_3B_3C_3A_4D_3E_3$ 을 그리고 변 A_4D_3 을 지름으로 하는 원 O_3 을 그린다.
 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 원 O_n 의 둘레의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [3점]



- ① 16π ② 18π ③ 20π ④ 22π ⑤ 24π

9. 다음은 $\log 2$ 가 무리수임을 증명한 것이다.

< 증명 >
 $\log 2$ 가 유리수라고 가정하자.
 $\log 2 = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수) ... ㉠
 로 놓으면
 $0 < \log 2 < 1$ 이므로 (가) 이다.
 ㉠에서
 $10^{\frac{n}{m}} = 2$ 이므로
 $2^{(나)} = 5^n$
 이때, (가) 이므로
 $2^{(나)}$ 은 (다) 이고 5^n 은 []가 되어 모순이다.
 따라서 $\log 2$ 는 무리수이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|---------|---------|-----|
| ① | $m > n$ | $m - n$ | 짝수 |
| ② | $m > n$ | $n - m$ | 홀수 |
| ③ | $m > n$ | m | 짝수 |
| ④ | $m < n$ | $n - m$ | 홀수 |
| ⑤ | $m < n$ | $m - n$ | 짝수 |

10. 양의 실수 a, b 에 대하여 연산 \diamond 을

$$a \diamond b = 2^a + [\log b]$$

로 정의할 때, $(3 \diamond 30) + (5 \diamond \frac{1}{50})$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

- ① 33 ② 36 ③ 39 ④ 42 ⑤ 45

11. 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 A 의 역행렬이 존재하고 $A^2 + AB = E, B^2 = E$ 일 때, $B - A$ 의 역행렬을 A, B 로 나타내는 과정이다.

$$A^2 + AB = A(A + B) = E \quad \dots \text{㉠}$$

$$\therefore A^{-1} = \text{(가)}$$

$$\text{또한 } (\text{(가)}) A = E \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 (나)}$$

$$\text{또, } B^2 = E \text{이므로}$$

$$A^2 + AB = B^2$$

$$A^2 + AB - 2B^2 = -E$$

$$\therefore (B - A)^{-1} = \text{(다)}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|------------|--------------|----------|
| ① | $A^2 + AB$ | $AB \neq BA$ | $A - 2B$ |
| ② | $A^2 + AB$ | $AB = BA$ | $A + 2B$ |
| ③ | $A + B$ | $AB = BA$ | $A - 2B$ |
| ④ | $A + B$ | $AB = BA$ | $A + 2B$ |
| ⑤ | $A + B$ | $AB \neq BA$ | $A - 2B$ |

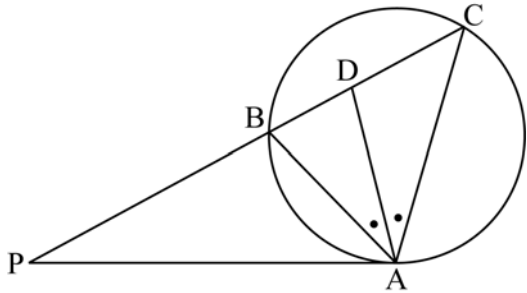
12. 실수 a, b 에 대하여 두 행렬 A, B 를

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}$$

라 하자. $A + B = E$ 일 때, $(AB)^{-1}$ 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

13. 그림과 같이 원 밖의 한 점 P에서 원에 한 접선과 한 할선을 그을 때, 접점을 A 라 하고 원이 할선과 만나는 두 점을 각각 B, C 라 하자. 또, $\angle BAC$ 의 이등분선과 할선의 교점을 D 라 하자.



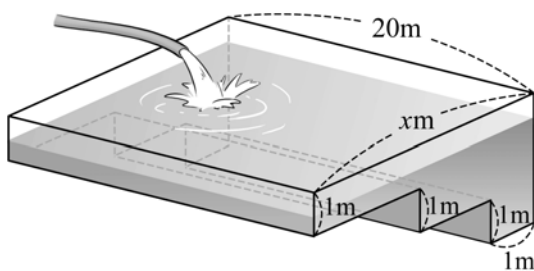
네 선분 PA, PB, PC, PD의 길이를 각각 a, b, c, d 라 할 때, a, b, c, d 를 성분으로 하는 이차정사각행렬 T 를 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하자.

<보기>에서 역행렬이 항상 존재하는 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

< 보 기 >		
ㄱ. T	ㄴ. $T+E$	ㄷ. $T-E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 그림과 같이 가로 길이가 20m 세로 길이가 x m 이고, 깊이가 단계적으로 1m씩 깊어지는 수영장이 있다. 이 수영장의 맨 밑바닥은 가로의 길이가 20m 세로 길이가 1m이다. 물이 완전히 빠진 상태에서 이 수영장에 1시간에 20m^3 씩 물을 채울 때, 처음 높이 1m를 채우는데 a 시간, 다음 높이 1m를 채우는데 b 시간, 그 다음 높이 1m를 채우는데 c 시간이 소요되어 총 21시간이 걸렸다. 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, x 의 값은? (단, 인접한 면은 서로 수직이고, 가장 깊은 곳의 깊이는 3m이다.) [3점]



- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

15. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >		
ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$	ㄴ. $\sum_{n=1}^{99} a_n = 9$	ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 용액의 수소이온 농도 $[H^+]$ 와 수산화이온 농도 $[OH^-]$ 에 대하여

$$[OH^-] = 10^{-14} \times \frac{1}{[H^+]}$$

이 성립하고, 용액의 산성도를 나타내는 pH는

$$pH = -\log[H^+]$$

로 정의된다. 이때, $[OH^-] = 10^{-4}$ 인 용액의 pH의 값은? [4점]

- ① 6.0 ② 7.0 ③ 8.0 ④ 9.0 ⑤ 10.0

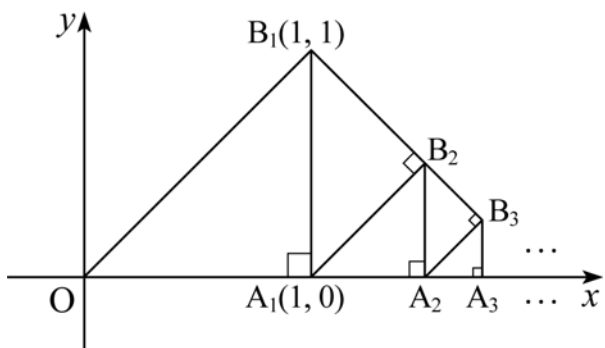
17. 자연수 n 에 대하여 $\log 2^n$ 의 지표를 $f(n)$, $\log 5^n$ 의 지표를 $g(n)$ 이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(10)=3$
 ㄴ. $f(n)+g(n)=n$
 ㄷ. 2^n 의 자릿수와 5^n 의 자릿수의 합은 10^n 의 자릿수와 같다.

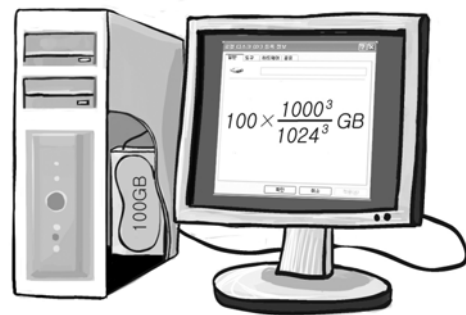
- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A_1(1, 0)$, 점 $B_1(1, 1)$ 과 원점 O 를 꼭지점으로 하는 직각이등변삼각형 OA_1B_1 이 있다. 선분 A_1B_1 을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_1B_2B_1$ 을 삼각형 OA_1B_1 의 외부에 그린다. 선분 A_1B_2 를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_1A_2B_2$ 를 삼각형 $A_1B_2B_1$ 의 외부에 그린다. 계속하여 선분 A_2B_2 를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_2B_3B_2$ 를 삼각형 $A_1A_2B_2$ 의 외부에 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 직각이등변삼각형 $A_{10}A_{11}B_{11}$ 의 무게중심을 $G(a, b)$ 라 하자. 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{2^{10}-2}{2^{10}}$ ② $\frac{2^{10}-1}{2^{10}}$ ③ $\frac{2^{11}-3}{2^{10}}$
 ④ $\frac{2^{11}-2}{2^{10}}$ ⑤ $\frac{2^{11}-1}{2^{10}}$

19. 컴퓨터의 저장장치인 하드디스크에 표시되어 있는 1GB(기가 바이트)는 1000^3 Byte(바이트)를 나타낸다. 그런데 컴퓨터의 운영체제는 1024^3 Byte를 1GB로 인식하기 때문에 하드디스크에 표시된 용량과 컴퓨터 운영체제가 인식하는 용량이 달라 사용자를 혼란스럽게 한다. 예를 들어 100GB로 표시된 하드디스크를 컴퓨터에 설치하면 컴퓨터는 $100 \times \frac{1000^3}{1024^3}$ GB로 인식한다.



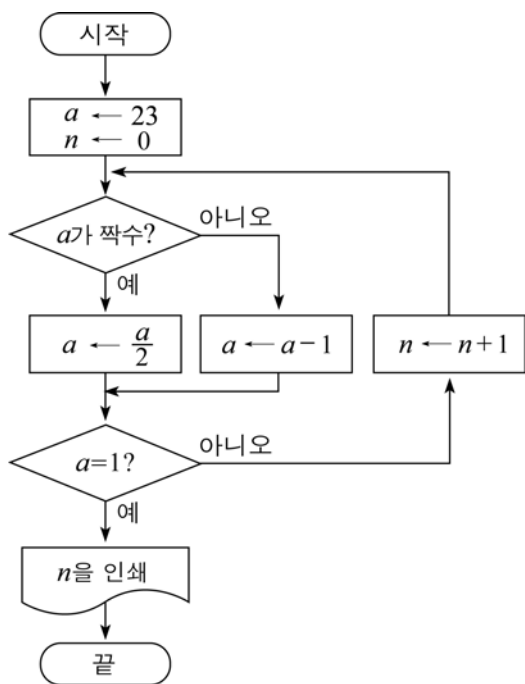
어떤 사람이 500GB로 표시된 하드디스크를 컴퓨터에 설치했을 때, 컴퓨터가 인식하는 용량을 다음 상용로그표를 이용하여 구한 것은? (단, 바이트는 컴퓨터 저장장치 용량의 기본 단위이다.)

[4점]

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.301	.303	.305	.308	.310	.312	.314	.316	.318	.320
...
4.4	.644	.644	.645	.646	.647	.648	.649	.650	.651	.652
4.5	.653	.654	.655	.656	.657	.658	.659	.660	.661	.662
4.6	.663	.664	.665	.666	.667	.668	.668	.669	.670	.671
4.7	.672	.673	.674	.675	.676	.678	.678	.679	.679	.680
4.8	.681	.682	.683	.684	.685	.686	.687	.688	.688	.689
...
9.3	.969	.969	.969	.970	.970	.971	.971	.972	.972	.973

- ① 약 447GB ② 약 457GB ③ 약 467GB
 ④ 약 477GB ⑤ 약 487GB

20. 다음 순서도에서 인쇄되는 n 의 값은? [4점]



- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

21. 자연수 n 에 대하여 집합

$$A_n = \left\{ \frac{a}{n} \mid \left[\frac{a}{n} \right] = 1, a \text{는 자연수} \right\}$$

의 원소들의 총합을 S_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} S_k$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

- ① 220 ② 255 ③ 280 ④ 305 ⑤ 330

단답형(22 ~ 30)

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 3^n}{4^{n-1} + 2^n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

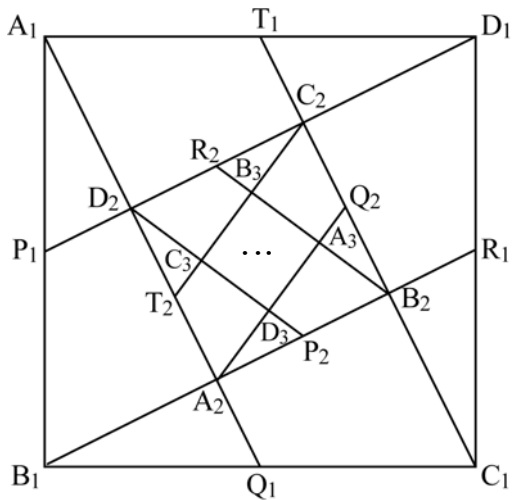
23. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{4n^2 - 1}$ 의 합을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 넓이를 S_1 이라 하자.

변 $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1$ 의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, T_1 이라 하고, 선분 A_1Q_1, B_1R_1 의 교점을 A_2 , 선분 B_1R_1, C_1T_1 의 교점을 B_2 , 선분 C_1T_1, D_1P_1 의 교점을 C_2 , 선분 D_1P_1, A_1Q_1 의 교점을 D_2 라 할 때, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이를 S_2 라 하자.

변 $A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2$ 의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2, T_2 라 하고, 선분 A_2Q_2, B_2R_2 의 교점을 A_3 , 선분 B_2R_2, C_2T_2 의 교점을 B_3 , 선분 C_2T_2, D_2P_2 의 교점을 C_3 , 선분 D_2P_2, A_2Q_2 의 교점을 D_3 이라 할 때, 사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 넓이를 S_n 이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값을 구하시오. [3점]



25. 이차정사각행렬 A 가 $A^2 + A - 2E = O$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 를 만족한다. $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 가 되는 상수 a, b 에 대하여 $100a + 10b$ 의 값을 구하시오. (단, E 는 단위행렬이고 O 는 영행렬이다.) [3점]

26. 역행렬을 갖는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & -5 \end{pmatrix}$ 가 $A - 3A^{-1} = O$ 를 만족한다.

이때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 영행렬이다.) [3점]

27. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 X, Y 에 대하여 $X + Y = E, XY = O$ 일 때, 행렬 A 를 $A = 3X + Y$ 라 하면 $A^3 = aX + Y$ 이다. a 의 값을 구하시오. (단, E 는 단위행렬이고 O 는 영행렬이다.) [4점]

28. 양의 실수 k 에 대하여 k 의 네제곱근 중 실수인 것을 a, b ($a > b$)라 하고, k 의 세제곱근 중 실수인 것을 $c, -k$ 의 세제곱근 중 실수인 것을 d 라 한다. 이때, $\log_2 \frac{c}{a} = \log_2 \frac{b}{d} + 1$ 을 만족하는 k 의 값을 구하시오. [4점]

29. 다음과 같이 분모는 1부터 시작하여 99까지 1씩 증가하고, 분자는 99부터 시작하여 1까지 1씩 감소하는 분수로 이루어진 수열이 있다.

$$\frac{99}{1}, \frac{98}{2}, \frac{97}{3}, \dots, \frac{1}{99}$$

이 수열에서 자연수인 항들의 총합을 구하시오. [4점]

30. 그림과 같이 반지름의 길이가 r_1 인 세 원 C_1, C_2, C_3 의 중심과 반지름의 길이가 r_2 인 두 원 O_1, O_2 의 중심이 모두 한 직선 위에 있다.

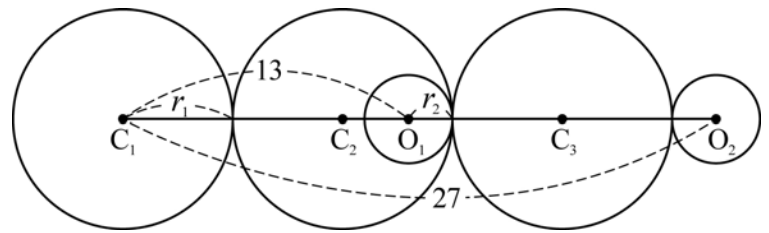
두 원 C_1, C_2 는 외접하고, 두 원 C_2, C_3 이 외접한다. 두 원 C_1, C_3 은 만나지 않는다.

원 O_1 은 원 C_2 에 내접하고 원 C_3 에 외접한다. 원 O_2 는 원 C_3 에 외접하고 원 C_2 와 만나지 않는다.

원 C_1 과 원 O_1 의 중심거리가 13이고 원 C_1 과 원 O_2 의 중심거리가 27일 때, r_1, r_2 에 대한 연립일차방정식을 행렬을 이용하여

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -5 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$$

과 같이 나타낼 수 있다.



$10(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, $r_1 > r_2$) [4점]

※ 확인 사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.