2008년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

정 답

1	⑤	2	①	3	④	4	③	5	④	6	④	7	①	8	②
9	①	10	④	11	①	12	③	13	②	14	②	15	⑤	16	②
17	③	18	③	19	⑤	20	②	21	⑤	22	16	23	14	24	56
25	24	26	10	27	100	28	20	29	15	30	13				

해 설

1. [출제의도] 무리식을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$

2. [출제의도] 근과 계수의 관계를 알고 식을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

$\therefore$ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\times 5=-11$

3. [출제의도] 삼차방정식의 근을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=x^3-7x^2+5x+1$ 이라 하면

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$x^3-7x^2+5x+1=(x-1)(x^2-6x-1)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x^2-6x-1=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=3\pm\sqrt{10}$

4. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ 에서

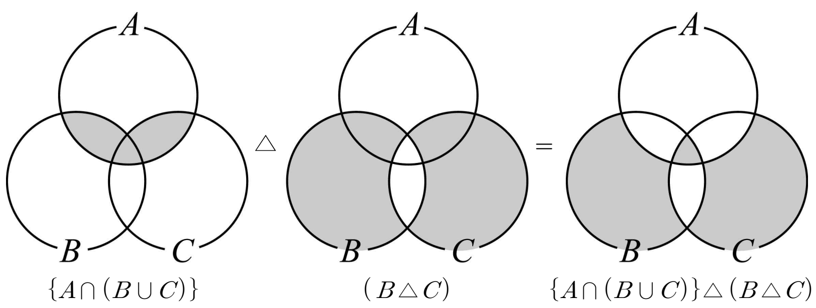
$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

$\therefore$ $\sec\theta\,\mathrm{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{8}{3}$

5. [출제의도] 집합의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$\{A\cap(B\cup C)\}$　　$(B\triangle C)$　　$\{A\cap(B\cup C)\}\triangle(B\triangle C)$

6. [출제의도] 충분조건과 필요조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(i) a, b 가 실수이므로

$ab=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 $b=0$

$a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ 이고 $b=0$

$\therefore$ 필요조건

(ii) $a+b=0$ 이면 $b=-a$ 이므로 $a^2-b^2=a^2-(-a)^2=0$

$\therefore$ $a+b=0$ 이면 $a^2-b^2=0$ 이다.

한편, $a=b=2$ 일 때 $a^2-b^2=0$ 이지만 $a+b=4\neq 0$

$\therefore$ 충분조건

따라서 (가): 필요, (나): 충분

7. [출제의도] 나머지정리를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

나머지정리에 의하여 $f(a)=R_1$, $f(-a)=R_2$

$f(x)$ 를 x^2-a^2 으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $px+q$ 라 하면

$f(x)=(x^2-a^2)Q(x)+px+q$

$f(a)=R_1$ 에서 $pa+q=R_1$ ……㉠

$f(-a)=R_2$ 에서 $-pa+q=R_2$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=\dfrac{R_1-R_2}{2a}$, $q=\dfrac{R_1+R_2}{2}$

따라서 구하는 나머지는 $\dfrac{R_1-R_2}{2a}x+\dfrac{R_1+R_2}{2}$ 이다.

8. [출제의도] 주어진 연산 장치를 이해하고 이중근호를 간단히 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연산 장치 $\boxed{+}$에 45와 36이 입력되므로

$p=\sqrt{45+36}=\sqrt{81}=9$

연산 장치 $\boxed{-}$에 92와 12가 입력되므로

$q=\sqrt{92-12}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

따라서 연산 장치 $\boxed{+}$에 9와 $4\sqrt{5}$ 가 입력되므로

$r=\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\sqrt{20}}=2+\sqrt{5}$

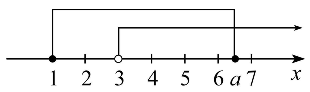
9. [출제의도] 이차연립부등식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) $2(x-1)>x+1$ 에서 $x>3$

(ii) $x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)\leq 0$

$a<1$ 이면 $a\leqq x\leqq 1$ 이므로 주어진 연립부등식의 해가 없다.

$a\geqq 1$ 이면 $1\leqq x\leqq a$



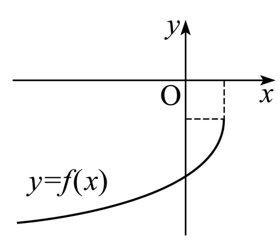
이때 연립부등식을 만족하는 정수 x가 3 개이므로

$\therefore$ $6\leqq a<7$

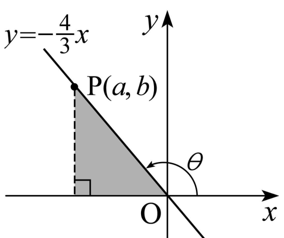
10. [출제의도] 이차함수와 무리함수의 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서 $a<0,\ b>0,\ c>0$ 이므로

무리함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}-c$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



11. **[출제의도] 주어진 동경에 대하여 삼각함수의 값을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**



$a<0$, $b>0$ 이면 직선 $y=-\frac{4}{3}x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 제 2사분면에 존재하므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 이다.

직선의 기울기 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$ 이므로

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$, $\sec\theta=-\frac{5}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$

따라서 $\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)=\sin\theta-\cos\theta=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}$ 이다.

12. **[출제의도] 복소수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$ 이므로 $1+i\in A$ (참)

ㄴ. $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면

$z^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

이때 $z\in A$ 이므로 $a^2=b^2$, $ab\neq 0$ 이다.

$(\bar{z})^2=(a-bi)^2=(a^2-b^2)-2abi=-2abi$ 이므로 $\bar{z}\in A$ (참)

ㄷ. $z_1=1+i$, $z_2=1-i$ 라 하면

${z_1}^2=(1+i)^2=2i$, ${z_2}^2=(1-i)^2=-2i$ 이므로 $z_1\in A$, $z_2\in A$ 이지만

$(z_1z_2)^2=\{(1+i)(1-i)\}^2=2^2=4$ 이므로 $z_1z_2\not\in A$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<다른 풀이>

ㄴ. $(\bar{z})^2=\overline{z^2}$ 이므로 z^2 이 순허수이면 $(\bar{z})^2$도 순허수이다.

13. **[출제의도] 직선의 방정식을 이해하고 선분의 내분점을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

직선 AC 의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$ 이므로

점 B 를 지나고 직선 AC 에 수직인 직선의 방정식은

$y=\boxed{\frac{c-a}{b}}(x+c)$

이때 $x=a$ 이면 $y=\frac{c^2-a^2}{b}$ 이므로 수심은 $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{c^2-a^2}{b}\right)$이다.

또, 선분 AC 의 중점 $\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b}{2}\right)$를 지나고 직선 AC 에 수직인 직선의 방정식은

$y-\frac{b}{2}=\frac{c-a}{b}\left(x-\frac{a+c}{2}\right)$

여기서 $x=0$ 이면 $y=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ 이므로 외심은

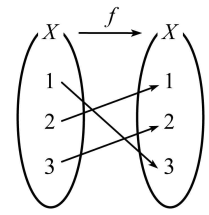
$\mathrm{Q}\left(0,\ \boxed{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}\right)$

그런데 $\frac{a}{3}=\frac{2\times0+1\times a}{2+1}$, $\frac{b}{3}=\frac{2\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}+1\times\frac{c^2-a^2}{b}}{2+1}$ 이므로

무게중심 $\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right)$는 선분 PQ 를 $\boxed{2:1}$ 로 내분한다.

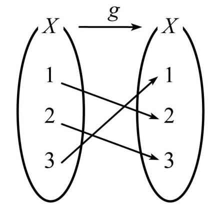
14. **[출제의도] 합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 추론하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

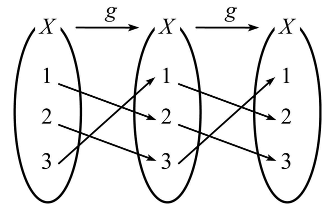
$f^3=I$ 이므로 $f(1)=3$ 이면, $f(3)=2$, $f(2)=1$



함수 f 의 역함수 g 에 대하여 $g^3=I$ 이므로

$g^{10}=g$, $g^{11}=g^2$





$\therefore\ g^{10}(2)+g^{11}(3)=g(2)+g^2(3)=3+2=5$

15. **[출제의도] 여러 가지 절대부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$ (등호는 $a=b$일 때 성립) (참)

ㄴ. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (참)

ㄷ. $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$

각 변끼리 더하면

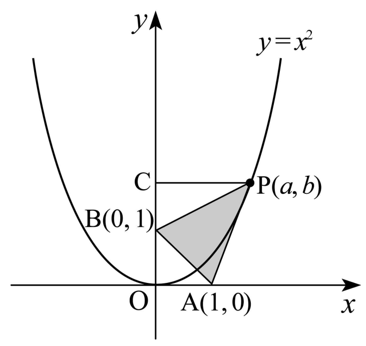
$2(a+b+c)\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$\therefore\ a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ (등호는 $a=b=c$ 일 때 성립) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16. **[출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

점 P 에서 x 축과 평행한 직선을 그어서 y 축과 만나는 점을 C 라 하면 $\mathrm{C}(0,\ b)$ 이고, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 는 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $b=a^2$ 이다.



삼각형 APB 의 넓이를 S라 하면

$S=\square\mathrm{OAPC}-(\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{BPC})$

$=\frac{1}{2}(1+a)b-\left\{\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}(b-1)a\right\}$

$=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

한편 $S=\frac{5}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

정리하면 $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=2$

$b=a^2=2^2=4$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

17. [출제의도] 도형의 평행이동을 이해하고 원과 직선의 위치관계를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

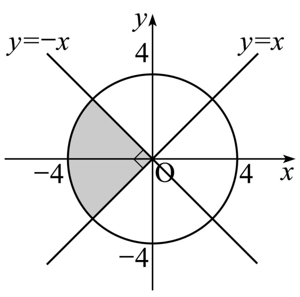
원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면
$(x-a)^2+y^2=1$이 되고
이 원이 직선 $3x-4y-4=0$에 접하려면
원의 중심 $(a,0)$에서 직선 $3x-4y-4=0$에 이르는 거리 d가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 한다. 즉,

$d=\dfrac{|3a-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$, $|3a-4|=5$, $3a-4=\pm 5$

$\therefore\ a=3\ (\because a>0)$

18. [출제의도] 음수의 제곱근의 성질을 이해하고 부등식의 영역의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

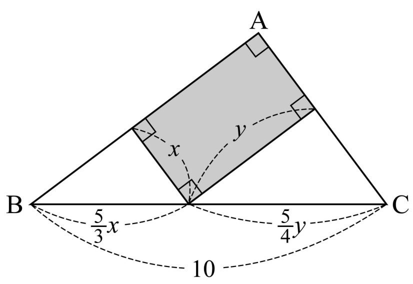
$\sqrt{x+y}\,\sqrt{x-y}=-\sqrt{(x+y)(x-y)}$ 에서
$x+y\leq 0,\ x-y\leq 0$ 이므로 $y\leq -x,\ y\geq x$
이고 $x^2+y^2\leq 4^2$ 이므로 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역은 다음 그림과 같다.



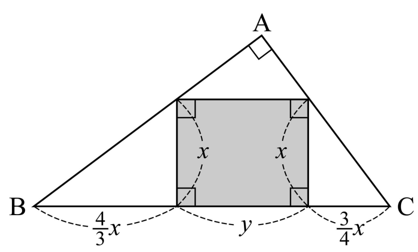
따라서 점 $(x,\ y)$가 존재하는 영역의 넓이는
$\dfrac{1}{4}\times\pi\times 4^2=4\pi$

19. [출제의도] 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 x, y라고 하면 $S_1=xy$이고, 닮음비에 의해



$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{4}y=10$
$\therefore\ 4x+3y=24$
산술 · 기하평균에서
$24=4x+3y\geq 2\sqrt{4x\times 3y}$
(단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)
$12\geq\sqrt{12xy}$, $12xy\leq 144$, $S_1=xy\leq 12$
따라서 S_1의 최댓값은 12이다. (참)
ㄴ. ㄱ에서 $4x=3y=12$, 즉 $x=3$, $y=4$일 때 S_1이 최대이다.
따라서 S_1이 최대일 때 직사각형의 둘레의 길이는 14이다. (참)
ㄷ. 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 x , y라고 하면 $S_2=xy$이고, 닮음비에 의해



$\dfrac{4}{3}x+y+\dfrac{3}{4}x=10$ 에서
$16x+12y+9x=120$, $25x+12y=120$
$120=25x+12y\geq 2\sqrt{25x\times 12y}$
$=10\sqrt{12xy}$
(단, 등호는 $25x=12y$일 때 성립)
$\sqrt{12xy}\leq 12$, $12xy\leq 144$, $S_2=xy\leq 12$
따라서 S_1의 최댓값과 S_2의 최댓값은 같다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20. [출제의도] 유리식의 계산을 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a=\dfrac{P_1+P_3}{P_2}\times 100,\ b=\dfrac{P_1}{P_2}\times 100$이므로

$a=\left(\dfrac{P_1}{P_2}+\dfrac{P_3}{P_2}\right)\times 100=b+\dfrac{P_3}{P_2}\times 100$

$\therefore\ P_3=\dfrac{a-b}{100}\times P_2,\quad P_1=\dfrac{b}{100}\times P_2$

$\therefore$ (고령화 지수) $=\dfrac{P_3}{P_1}\times 100=\dfrac{\dfrac{a-b}{100}\times P_2}{\dfrac{b}{100}\times P_2}\times 100$

$=\dfrac{a-b}{b}\times 100$ (%)

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\,\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\cos 60^\circ$
$=80^2+100^2-2\cdot 80\cdot 100\cdot\dfrac{1}{2}$
$=8400$
$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{8400}$
호수의 반지름의 길이를 R(m)라 하면, 사인법칙에서
$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore\ R=\dfrac{\sqrt{8400}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\dfrac{8400}{3}}=\sqrt{2800}$

따라서 호수의 넓이는
$\pi R^2=2800\pi\ (\mathrm{m}^2)$

22. [출제의도] 복소수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$z=3+i,\ \bar{z}=3-i$ 이므로 $z+\bar{z}=6,\ z\bar{z}=10$
$z^2+(\bar{z})^2=(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}$
$=6^2-2\cdot 10$
$=16$

23. [출제의도] 두 다항식의 최대공약수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=x^2+3x-a$, $g(x)=x^2-bx+4$
라 놓으면 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 $x-2$ 의 인수를 갖는다.
$f(2)=4+6-a=0$
$\therefore\ a=10$
$g(2)=4-2b+4=0$
$\therefore\ b=4$
$\therefore\ a+b=10+4=14$

24. [출제의도] 주어진 자료의 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(평균) $=\dfrac{4+2+3+3+2}{5}=\dfrac{14}{5}=2.8$

$s^2=\dfrac{(4-2.8)^2+(2-2.8)^2+(3-2.8)^2+(3-2.8)^2+(2-2.8)^2}{5}$

$=\dfrac{2.8}{5}=\dfrac{14}{25}$

$\therefore\ 100s^2=56$

25. **[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선이 접할 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

(ⅰ) $y=x^2+ax+b$ 와 $y=-x+4$ 가 접할 때

$x^2+ax+b=-x+4$ 에서 $x^2+(a+1)x+b-4=0$

$D=(a+1)^2-4(b-4)=0$ ……㉠

(ⅱ) $y=x^2+ax+b$ 와 $y=5x+7$ 이 접할 때,

$x^2+ax+b=5x+7$ 에서 $x^2+(a-5)x+b-7=0$

$D=(a-5)^2-4(b-7)=0$ ……㉡

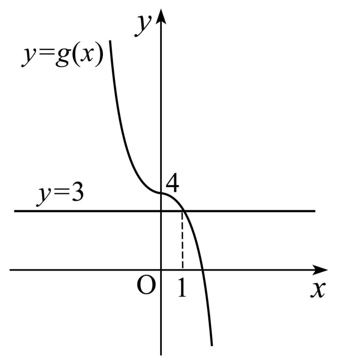
㉠−㉡에서 $12a-36=0$ ∴ $a=3$

또, ㉠에서 $b=8$

∴ $ab=3\times 8=24$

26. **[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$y=g(x)$의 그래프를 그려 보면,



$g(f(k))=3$ 이므로 $f(k)>0$ 이고 $-\{f(k)\}^2+4=3$

$\therefore f(k)=1$

$f(k)=|k|-4=1$

$\therefore k=\pm 5$

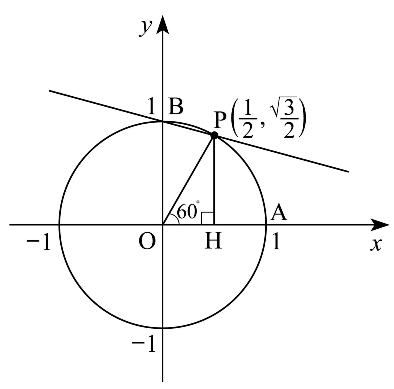
따라서 $\alpha=5$, $\beta=-5$ 이다.

∴ $\alpha-\beta=10$

27. **[출제의도] 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 하자. $\angle \mathrm{POH}=60^\circ$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}=1$ 이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



따라서 두 점 B(0, 1), $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나는 직선 BP 의 기울기 m 은

$$m=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{1}{2}-0}=-2+\sqrt{3}$$

$a=-2$, $b=1$ 이므로

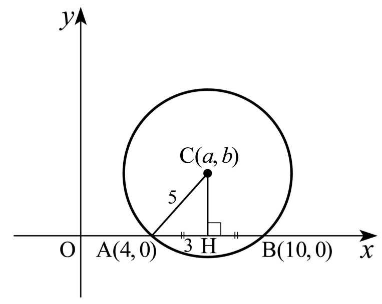
$20(a^2+b^2)=20(4+1)=100$

28. **[출제의도] 원의 방정식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

원의 중심 $\mathrm{C}(a,b)$에서 현 AB 에 수선의 발 H를 내리면

$\overline{\mathrm{AH}}=3,\ r=5$ $\therefore \overline{\mathrm{CH}}=4$

따라서 원의 방정식은 $(x-7)^2+(y-4)^2=5^2$



원점 O에서 원 위의 점 P까지의 거리의 최솟값은 $\sqrt{7^2+4^2}-5$,

최댓값은 $\sqrt{7^2+4^2}+5$

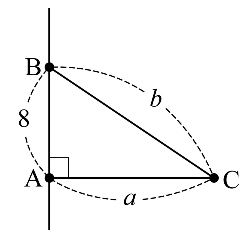
$\therefore \sqrt{65}-5\leq\overline{\mathrm{OP}}\leq\sqrt{65}+5$

선분 OP 의 길이가 될 수 있는 정수는 $4, 5, \cdots, 13$ 의 10(개)이고,

각각에 대하여 점 P는 2개씩 존재한다.

따라서 선분 OP 의 길이가 정수가 되는 점 P 의 개수는 20(개)이다.

29. **[출제의도] 이차연립방정식을 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**



직선도로 AB 의 길이는 $32-24=8$ (km)

직선도로 AC, BC 의 길이를 각각 a , b 라 하면

$a+b=32$ ……㉠

$8^2+a^2=b^2$ ……㉡

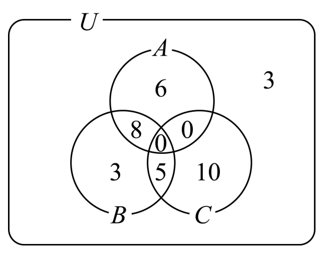
㉡에서 $64=(b+a)(b-a)$ ……㉢

㉠을 ㉢에 대입하면 $b-a=2$ ……㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a=15$, $b=17$

따라서 직선도로 AC 의 길이는 15 (km)

30. **[출제의도] 집합의 원소의 개수를 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**



A, B, C를 읽은 학생들의 집합을 각각 A , B , C 라 하면

$n(A)=14,\ n(B)=16,\ n(A\cup B)=22$이므로

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=14+16-22=8$

이때 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=14-8=6$이므로

$n(B\cup C)=35-(6+3)=26$

또, $n(C)=15$ 이므로

$n(B\cap C)=n(B)+n(C)-n(B\cup C)=16+15-26=5$

$n(A\cap C)=0$이므로 $n(A\cap B\cap C)=0$

∴ $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3n(A\cap B\cap C)$

$=8+5+0-0=13$

따라서 A, B, C 중 두

종류의 책만 읽은 학생은 13(명)이다.