

수리 영역(가형)

제 2 교시

성명

수험번호

2

1

- 먼저 수험생이 선택한 과목의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 기입하십시오.
- 답안지에 수험 번호, 선택 과목, 답을 표기할 때에는 반드시 ‘수험 생이 지켜야 할 일’ 에 따라 표기하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’ 이 포함되면 그 ‘0’ 도 답란에 반드시 표 시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하 시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1. $\sqrt[5]{8} \times 4^{-\frac{4}{5}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{8}$
- ② $\frac{1}{4}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ 1
- ⑤ 2

2. $\log_3 12 + 2\log_3 \frac{3}{2}$ 의 값은? [2점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} - 5^{n+1}}{5^n - 3^n}$ 의 값은? [2점]

- ① -5
- ② -3
- ③ $-\frac{1}{3}$
- ④ $\frac{1}{5}$
- ⑤ $\frac{1}{3}$

4. 단위행렬 E 의 실수배가 아닌 이차정사각행렬 A 에 대하여 $(A-2E)^2 = O$ 를 만족하는 A 의 역행렬이 $pA+qE$ 일 때, $p+q$ 의 값은? (단, O 는 영행렬이고 p 와 q 는 상수이다.) [3점]

- ① $-\frac{3}{4}$
- ② $-\frac{1}{2}$
- ③ 1
- ④ $\frac{1}{2}$
- ⑤ $\frac{3}{4}$

5. 2이상의 자연수 n 에 대하여 $\frac{\sqrt[n]{2^{18}}}{\sqrt[n]{3^{24}}}$ 이 유리수가 되도록 하는 n 의 개수는? [3점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

6. 집합 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일 대응이다.

이때, $f(x_1) \times f(x_3) \times f(x_5) = f(x_2) \times f(x_4) \times f(x_6)$ 을 만족하는 함수 f 의 개수는? [3점]

- ① 36
- ② 48
- ③ 54
- ④ 60
- ⑤ 72

7. 자연수 전체의 집합 N 을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$$\text{I. } f(1) = 2$$

$$\text{II. } x \in N, y \in N \text{에 대하여 } f(x+y) = f(x)f(y) \text{가 성립한다.}$$

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + f(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)을 만족할 때, a_{10} 의 값은? [3점]

- ① 127
- ② 255
- ③ 511
- ④ 723
- ⑤ 1023

8. 함수 $f(x) = (2^{x-2} + 2^{-x})^2 - (2^x + 2^{2-x}) + 8$ 의 최솟값은? [3점]

- ① -8
- ② -4
- ③ 0
- ④ 4
- ⑤ 8

9. 이차정사각행렬 A, B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬, A^{-1} 는 A 의 역행렬이다.) [4점]

< 보기 >

ㄱ. $A^2 = B^2$ 이면 $A = B$ 또는 $A = -B$ 이다.
 ㄴ. $(A + E)(A - E) = E$ 이면 $A^2 B = B A^2$ 이다.
 ㄷ. $A^3 + A^2 + A + E = O$ 이면 $(A^2)^{-1} = A^2$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 위치기반서비스(LBS)란 휴대폰 속에 기지국이나 위성항법장치(GPS)와 연결되는 칩을 부착해 위치와 관련된 각종 정보를 제공하는 서비스를 일컫는다.

위치기반서비스 이용자 수가 매월 전월보다 10%씩 증가한다고 하자. 현재 이용자 수가 10만 명이라고 할 때, 12개월 후 이용자 수는? (단, $\log 1.1 = 0.04$, $\log 3.02 = 0.48$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 302000 명
- ② 314000 명
- ③ 326000 명
- ④ 338000 명
- ⑤ 350000 명

11. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육면체를 여러 개 붙여서 만든 입체가 지면에 고정되어 있다. 표는 이 입체를 방향1, 방향2, 방향3에서 바라보았을 때 보이는 모양과 그 때의 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수를 각각 m_1, m_2, m_3 로 나타낸 것이다.

바라본 방향	보이는 모양	정사각형의 개수
방향1		$m_1 = 2$
방향2		$m_2 = 3$
방향3		$m_3 = 6$

이때, 행렬 A 의 (i, j) 성분을 a_{ij} 라 하고

$$a_{ij} = m_i \times m_j \quad (i=1, 2, 3, j=1, 2, 3)$$

으로 정의하면 위 그림에 대응하는 행렬은 $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 6 & 9 & 18 \\ 12 & 18 & 36 \end{pmatrix}$ 이다.

이와 같이 정의된 행렬 $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \\ 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$ 에 해당하는 입체는? [3점]

- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

4

수리 영역(가형)

12. 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하면 무한수열 $\{a_n b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄴ. 무한수열 $\{a_n^2\}$, $\{b_n^2\}$ 이 수렴하면 무한수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$, $a_n > a_{n+1}$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 표는 어떤 프로그램을 이용하여 $A_1 = 25$ 일 때,

$$A_2 = \frac{2}{3} \times A_1 + 3 \text{ 에 의하여 } A_2 = 19.6666667 \text{ 을 구하고,}$$

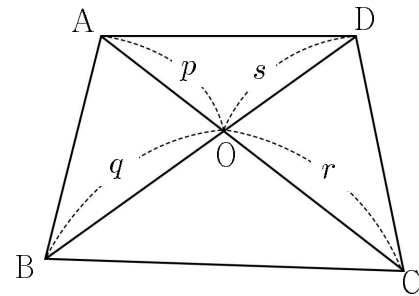
$$A_3 = \frac{2}{3} \times A_2 + 3 \text{ 에 의하여 } A_3 = 16.1111111 \text{ 을 구하고,}$$

이와 같은 방법으로 A_4, A_5, A_6, \dots 을 구한 결과의 일부를 나타낸 것이다. $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ 의 값은 어떤 일정한 수 α 에 한없이 가까워진다. 이때, α 의 값은? (단, 표에 제시된 값은 소수점 이하 8번째 자리에서 반올림한 것이다.) [3점]

A_2	$f(x) = \frac{2}{3} \times A_1 + 3$
A	
1	25
2	19.6666667
3	16.1111111
4	13.7407407

- ① 7
- ② 8
- ③ 9
- ④ 10
- ⑤ 11

14. 그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하자. 네 선분 AO, BO, CO, DO의 길이가 각각 p, q, r, s 일 때, 이를 성분으로 하는 행렬 $\begin{pmatrix} p & s \\ q & r \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하는 사각형은? [4점]



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

15. $0 < a < b < 1$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a 와 b 는 실수이다.) [4점]

< 보기 >

ㄱ. $0 < \log_a b < 1$

ㄴ. $\frac{\log a}{a} < \frac{\log b}{b}$

ㄷ. $\log_a \left(\frac{a}{b}\right) < \log_b \left(\frac{b}{a}\right)$

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 반지름의 길이가 5 km인 원형의 자동차 트랙을 각각 일정한 속력으로 주행하는 두 대의 자동차가 있다. 두 자동차는 같은 지점에서 동시에 출발하여 서로 반대 방향으로 주행하면 20분 후에 처음으로 만나고, 같은 방향으로 주행하면 1시간 40분 후에 처음으로 만난다. 두 자동차의 속도 x (km/시), y (km/시)의 값을 구하는 식을 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\pi \begin{pmatrix} 5 & a \\ 5 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이다. 이때, $|a-b|$ 의 값은? (단, 자동차의 크기와 트랙의 폭은 고려하지 않는다.) [4점]

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

17. 다음은 $\sum_{r=0}^{29} (-1)^r {}_{59}C_{2r}$ 의 값을 구하는 과정이다.

$\sum_{r=0}^{29} (-1)^r {}_{59}C_{2r} = {}_{59}C_0 - {}_{59}C_2 + {}_{59}C_4 - \dots - {}_{59}C_{58}$ 이므로
 $(1+x)^{59} = {}_{59}C_0 + {}_{59}C_1x + {}_{59}C_2x^2 + \dots + {}_{59}C_{59}x^{59}$ 을 이용하면
 $(1+i)^{59} = \sum_{r=0}^{29} (-1)^r {}_{59}C_{2r} + (\text{가}) i$ 이다.
 한편, $(1+i)^{59} = \{(1+i)^2\}^{29} \times (1+i)$
 $= (\text{나}) + 2^{29}i$ 이므로
 $\sum_{r=0}^{29} (-1)^r {}_{59}C_{2r}$ 의 값은 (나) 이다.

(가), (나)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$ 이다.) [3점]

- | | (가) | (나) |
|---|--|-----------|
| ① | $\sum_{r=0}^{29} (-1)^r {}_{59}C_{2r+1}$ | 2^{29} |
| ② | $\sum_{r=0}^{29} (-1)^r {}_{59}C_{2r+1}$ | -2^{29} |
| ③ | $\sum_{r=0}^{29} (-1)^{r+1} {}_{59}C_{2r+1}$ | 2^{29} |
| ④ | $\sum_{r=0}^{29} (-1)^{r+1} {}_{59}C_{2r+1}$ | -2^{29} |
| ⑤ | $\sum_{r=0}^{28} (-1)^{r+1} {}_{59}C_{2r+3}$ | 2^{29} |

18. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = \sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} \text{ 일 때,}$$

부등식 $\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{(n+1)^2}{2}$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

(i) $n=1$ 일 때,

$$1 < a_1 = \sqrt{2} < 2 \text{ 이므로 성립한다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때,

$$\frac{k(k+1)}{2} < a_k < \frac{(k+1)^2}{2} \text{ 이 성립한다고 가정하면}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + \sqrt{(k+1)(k+2)} < a_{k+1} < \frac{(k+1)^2}{2} + \sqrt{(k+1)(k+2)}$$

이다.

한편, $\sqrt{(k+1)(k+2)} > (가)$ 이므로

$$\frac{k(k+1)}{2} + \sqrt{(k+1)(k+2)} > (나) \text{ 이다.}$$

$k+1 > 0, k+2 > 0$ 이므로

$$\sqrt{(k+1)(k+2)} < (다) \text{ 이고,}$$

$$\frac{(k+1)^2}{2} + \sqrt{(k+1)(k+2)} < \frac{(k+2)^2}{2} \text{ 이다.}$$

그러므로 $n=k+1$ 일 때에도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

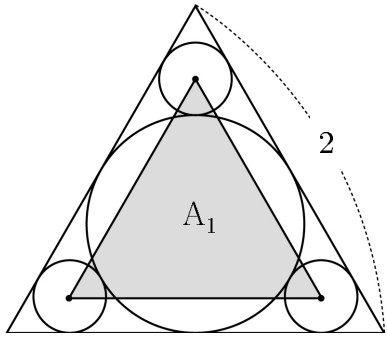
(가) ~ (다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [4점]

- | | (가) | (나) | (다) |
|---|-------|------------------------|------------------|
| ① | $k+1$ | $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ | $\frac{2k+1}{2}$ |
| ② | $k+1$ | $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ | $\frac{2k+3}{2}$ |
| ③ | $k+1$ | $\frac{(k+2)(k+3)}{2}$ | $\frac{2k+1}{2}$ |
| ④ | $k+2$ | $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ | $\frac{2k+1}{2}$ |
| ⑤ | $k+2$ | $\frac{(k+2)(k+3)}{2}$ | $\frac{2k+3}{2}$ |

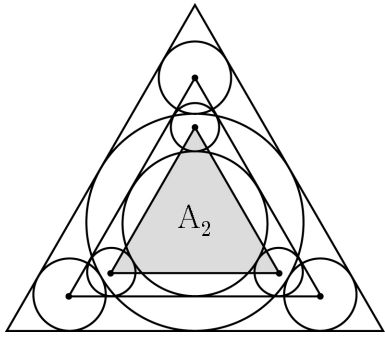
6

수리 영역(가형)

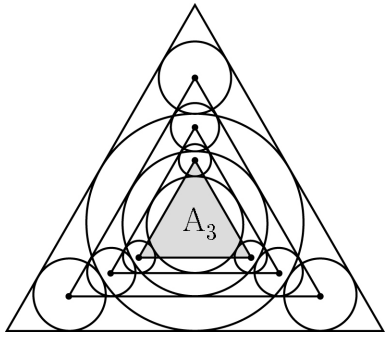
19. 한 변의 길이가 2인 정삼각형에 내접원을 그리고, 정삼각형의 두 변과 내접원에 접하는 세 원을 그린다. 이 세 원의 중심을 잇는 정삼각형을 그린다. 새로 얻은 정삼각형을 A_1 , 그 넓이를 S_1 이라 하자([그림 1] 참조). A_1 에 밀줄 친 과정을 시행하여 두 번째 얻은 정삼각형을 A_2 , 그 넓이를 S_2 라 하자([그림 2] 참조). A_2 에 밀줄 친 과정을 시행하여 세 번째 얻은 정삼각형을 A_3 , 그 넓이를 S_3 라 하자([그림 3] 참조). 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 정삼각형을 A_n , 그 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림 1]



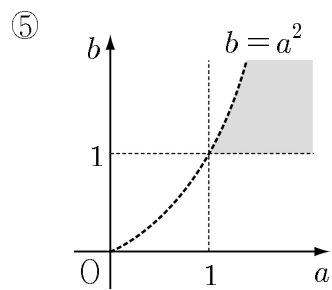
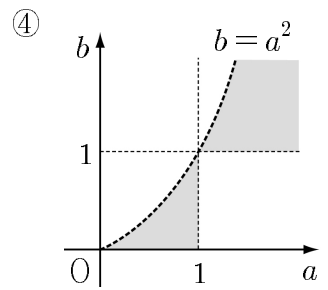
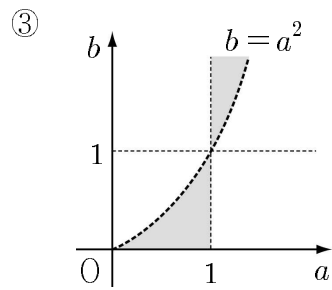
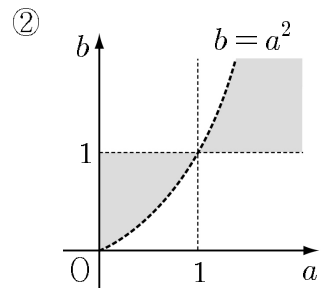
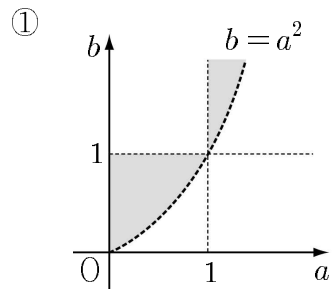
[그림 2]



[그림 3]

- ① $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- ② $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
- ③ $\frac{3}{4}\sqrt{3}$
- ④ $\frac{4}{5}\sqrt{3}$
- ⑤ $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

20. 이차함수 $f(x) = x^2 \log_a b + x \log_a b + \frac{1}{2}$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 를 만족할 때, 점 (a, b) 가 존재하는 영역을 어두운 부분으로 바르게 나타낸 것은? (단, a, b 는 1이 아닌 양수이고 경계는 포함하지 않는다.) [4점]



21. 자연수 n 에 대하여 집합

$$A_n = \{ x \mid \log_2 x^n = 4, x \text{는 정수} \}$$

$$B_n = \{ x \mid n \log_2 x = 4, x \text{는 정수} \}$$

일 때, 집합 $(A_1 \cup A_2 \cup A_4) - (B_1 \cup B_2 \cup B_4)$ 의 모든 원소의 합은?

[3점]

- ① -6
- ② -2
- ③ 0
- ④ 2
- ⑤ 6

단답형

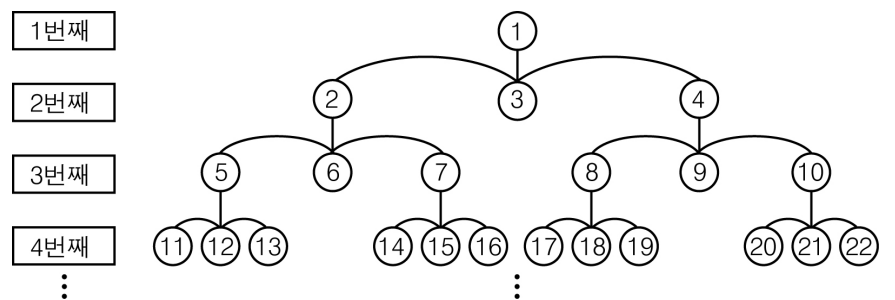
22. 등식 ${}_{n+1}P_3 = {}_nP_3 + 90$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 구하시오. [3점]

23. 서로 다른 세 수 $a, b, 3$ 이 이 순서로 등비수열을 이루고, $12, 3a, 2b$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $9a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. $(x^2 + 3x + 3)\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x 의 계수를 구하시오. [3점]

25. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = kA$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같은 규칙으로 위에서부터 차례로 숫자를 써내려간다. 예를 들어 17은 위에서 4번째, 왼쪽에서 7번째에 위치하고 있다. 2008은 위에서 m 번째, 왼쪽에서 n 번째에 위치한다고 할 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. [4점]

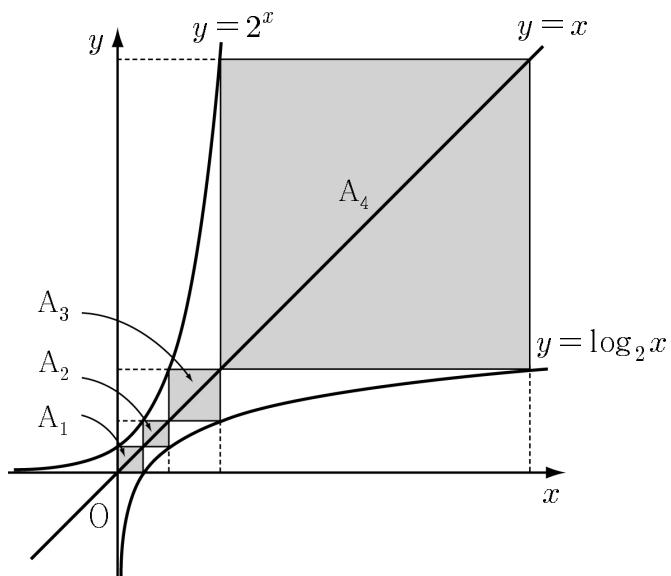


27. 무한급수

$$\left(\frac{a_1}{3} - 5\right) + \left(\frac{a_2}{6} - \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{a_3}{9} - \frac{11}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{3n} - \frac{3n+2}{2n-1}\right) + \cdots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_n + 21n - 7}{2a_n + 3n + 5}$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림에서 A_1 은 원점 O , 직선 $y=x$ 위의 한 점과 두 함수 $y=2^x$ 과 $y=\log_2 x$ 의 그래프가 좌표축과 만나는 두 점을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형이다. A_2, A_3, A_4 는 두 함수 $y=2^x, y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 각각의 한 점, $y=x$ 위의 두 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형이다. A_1 과 A_2, A_2 와 A_3, A_3 와 A_4 는 각각 한 개의 꼭짓점만을 공유한다. 이 때, A_4 의 넓이를 구하시오. [4점]



29. 남학생 6명과 여학생 2명이 있다. 8명 모두를 2개조로 나누어 A, B 두 구역에 청소를 배정하려고 한다. 각 조에는 적어도 3명을 배정하고, 2명의 여학생은 같은 조에 포함되도록 하는 방법의 수를 m 가지라 할 때, m 의 값을 구하시오. [4점]

30. 상용로그 $\log A$ 의 지표 n 과 기수 α 가 방정식 $4x^2 - 13x + \beta = 0$ 의 두 근일 때, $\sum_{k=1}^{30} \left[\frac{400\alpha}{n^k} \right]$ 의 값을 구하시오. (단, β 는 상수이고, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [4점]

※ 확인사항

- 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.