# 2008학년도 9월 모의평가 (수리영역-나형)  정답 및 해설

1.

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_7 \frac{1}{7} = -\log_2 2 - \log_7 7$$

$$= -1 - 1 = -2$$

답 ①

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n+1}{n^2+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{6+0+0}{1+0}$$

$$= 6$$

답 ④

3.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에서

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$$

따라서 $X$의 모든 성분의 합은 $-5$이다.

답 ⑤

4.

$$(2^{x+y}+2^{x-y})^2 - (2^{x+y}-2^{x-y})^2$$

$$= 2^{2(x+y)} + 2\cdot 2^{x+y}\cdot 2^{x-y} + 2^{2(x-y)}$$

$$- 2^{2(x+y)} + 2\cdot 2^{x+y}\cdot 2^{x-y} - 2^{2(x-y)}$$

$$= 2\cdot 2^{2x} + 2\cdot 2^{2x}$$

$$= 4\cdot 2^{2x}$$

$$= 2^{2x+2}$$

답 ②

5.

$$P(A\cup B)$$

$$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$= P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)$$

$$= \frac{2}{3}P(B)+\frac{1}{3} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ P(B) = \frac{7}{10}$$

$$\therefore\ P(B^c) = 1-P(B) = \frac{3}{10}$$

답 ③

6.

행렬 $\begin{pmatrix} k-6 & -2 \\ 2 & k-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(k-6)(k-1)-(-2)\cdot 2 = 0$,

$k^2-7k+10=0$

$(k-2)(k-5)=0$

$\therefore\ k=2$ 또는 $k=5$

이 때, $k=2$ 이면 $\frac{-4}{2} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{-6}$ 이므로 해가 존재하지 않고

$k=5$ 이면 $\frac{-1}{2} = -\frac{2}{4} = \frac{3}{-6}$ 이므로 해가 무수히 많다.

답 ⑤

7.

여학생 2명이 입장하는 방법의 수는

$2! = 2$

남학생 3명이 입장하는 방법의 수는

$3! = 6$

따라서, 이 학생 5명이 입장하는 방법의 수는

$2\times 6 = 12$ (가지)

답 ②

8.

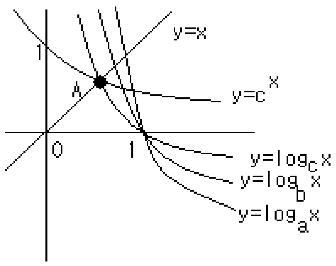
(i) $x=2$일 때 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$이므로

$\dfrac{1}{\log_2 a} < \dfrac{1}{\log_2 b} < 0$

$\therefore\ \log_2 a > \log_2 b$

$\therefore\ a > b$

(ii) 함수 $y=c^x$의 역함수 $y=\log_c x$의 그래프는 다음과 같이 곡선 $y=c^x$와 직선 $y=x$ 위의 점 A에서 만난다.




따라서 (i)에서 $b > c$

(i), (ii)에서 $a > b > c$

답 ①

9.

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^n + 3^n) - (2^{n-1} + 3^{n-1})$

$= 2^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1}$ $(n \geq 2)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+2\cdot 3^{n-1}}{2^n+3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

답 ④

10.

건전지의 수명은 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(m, \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이 때, 주어진 확률은

$P(m-0.5 \leq \overline{X} \leq m+0.5)$

$$= P\left(\frac{(m-0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(m+0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{6} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

$$= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right)$$

$= 0.8664$

이므로

$P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0.4332$

따라서 표준정규분포표를 이용하면

$\dfrac{\sqrt{n}}{6} = 1.5$이므로

$n = 81$

답 ③

11.
$n=k(k\geq 2)$ 일 때 성립한다고 가정하면

$a_k=\dfrac{k+1}{3}$ 이다.

$A_{k+1}=\{1, 2, \cdots, k, k+1\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합은,
$A_k$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합에 $k$개의 집합

$$\{1, k+1\}, \{2, k+1\}, \cdots, \{k, k+1\}$$

을 추가한 것이다.
$A_k$의 부분집합 중 원소가 2개인 부분집합의 개수는 $\left[\ {}_kC_2\ \right]$이고,
$a_k=\dfrac{k+1}{3}$ 이므로 ${}_kC_2$개의 부분집합에서 작은 원소를 뽑아 더한 합은

$${}_kC_2\times\frac{k+1}{3}$$

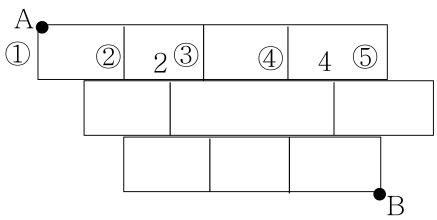
이다.
$\therefore\ a_{k+1}$

$$=\frac{\left[\ {}_kC_2\times\frac{k+1}{3}\ \right]+(1+2+\cdots+k)}{{}_{k+1}C_2}$$

$$=\frac{k+2}{3}=\frac{(k+1)+1}{3}$$

답 ②

12.

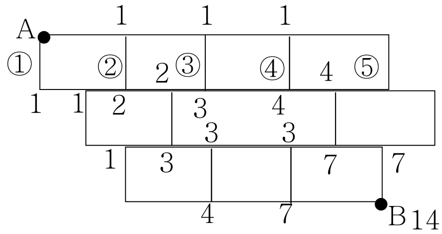



①번 길을 이용하여 B로 가는 경우
$1+3+4=8$ (가지)
②번 길을 이용하여 B로 가는 경우
$3+1=4$ (가지)
③번 길을 이용하여 B로 가는 경우

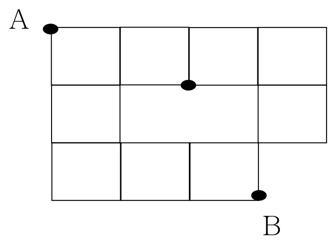
$1$ (가지)
④번 길을 이용하여 B로 가는 경우
$1$ (가지)
⑤번 길을 이용하여 B로 가는 경우는 최단거리로 가는 경우가 아니다.
따라서 구하는 경우의 수는
$8+4+1+1=14$ (가지)

답 ①

[다른 풀이]
(1) 각 갈림길까지 최단경로로 가는 경우의 수를 적으면 다음과 같다.




(2) 구하는 최단경로의 수는 다음 그림에서 A에서 B로 가는 최단경로의 수와 같다.




$$\therefore\ \frac{6!}{3!\times 3!}-\frac{3!}{2!}\times 2!$$
$$=20-6=14$$

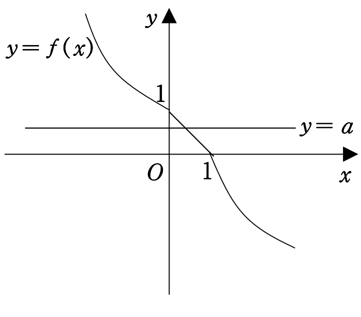
13.
삼각형의 무게중심은 중선을

꼭지점으로부터 $2:1$ 로 내분한다.
따라서 한 변의 길이가 $a$ 인 정사각형 $A_{n-1}$ 내부에 들어 있는 작은 정사각형 $A_n$ 의 한 변의 길이는 대각선 길이의 $\frac{1}{3}$ 이므로 $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots$$
$$= 3^2 + 2 + \frac{2}{9} + \cdots$$
$$= \frac{9}{1-\frac{2}{9}} = \frac{81}{7}$$

답 ⑤

14.
ㄱ. $\{f(-3)\}^2 = (a^{-3})^5 = a^{-15}$
$f(-15) = a^{-15}$
$\therefore \{f(-3)\}^2 = f(-15)$ (참)
ㄴ. $0<a<1$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.




따라서, $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다. (참)
ㄷ. $y=a^x$의 역함수는 $y=\log_a x$이므로 $y=a^x(x\le 0)$의 그래프와 $y=\log_a x(x\ge 1)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서, ㄴ에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)
그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15.
ㄱ. $8A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$이므로

$$L(8A) = \begin{pmatrix} \log_2 8 & \log_2 8 \\ \log_2 8 & \log_2 8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \log_2 2^3 & \log_2 2^3 \\ \log_2 2^3 & \log_2 2^3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 3A \quad \text{<참>}$$

ㄴ. $L(A) = E$에서
$$\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
이므로
$\log_2 a = 1$, $\log_2 b = 0$, $\log_2 c = 1$, $\log_2 d = 0$
$\therefore a=2,\ b=1,\ c=2,\ d=1$
이 때, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고 $2\cdot 2 - 1\cdot 1 \ne 0$ 이므로 행렬 $A$는 역행렬을 갖는다. <참>
ㄷ. $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$
이므로
$$L(A^2) = \begin{pmatrix} \log_2(a^2+bc) & \log_2(ab+bd) \\ \log_2(ca+dc) & \log_2(cb+d^2) \end{pmatrix}$$

$$2L(A) = 2\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \log_2 a^2 & \log_2 b^2 \\ \log_2 c^2 & \log_2 d^2 \end{pmatrix}$$

이 때, $L(A^2) = 2L(A)$ 이려면

$a^2 + bc = a^2 \cdots$㉠, $ab + bd = b^2$

$ca + dc = c^2$, $cb + d^2 = d^2$

㉠에서 $bc = 0$이므로 $b > 0$, $c > 0$에 모순이다.

따라서, $L(A^2) = 2L(A)$를 만족시키는 행렬 $A$가 존재하지 않는다. <거짓>

답 ③

16.

$a_3 = 14$, $a_4 = 26$, $a_5 = 38$,

$\cdots$

$a_{n+1} = a_n + 12$ ( $n \geq 3$)

을 추론할 수 있다.

$b_k = a_{k+2}$ ( $k = 1, 2, 3, \cdots$)로 두면

$b_1 = 14$, $b_2 = 26$

$b_{k+1} - b_k = 12$

$\therefore$ $b_k = 12k + 2$

$\therefore$ $a_{20} = b_{18} = 12 \times 18 + 2$

$= 218$

답 ②

[다른풀이]

$a_3 = 14$, $a_4 = 26$, $a_5 = 38$,

$\cdots$

$a_{n+1} = a_n + 12$ ( $n \geq 3$)

을 추론할 수 있다.

$\therefore$ $a_{20} = a_3 + 17 \times 12$

$= 14 + 17 \times 12$

17.

과자 A의 길이 $X$가 $m + 10$ 이상일 확률은

$$P(X \geq m + 10) = P\left(Z \geq \frac{10}{\sigma_1}\right)$$

과자 B의 길이 $Y$가 $m + 10$ 이하일 확률은

$$P(Y \leq m + 10) = P\left(Z \leq \frac{-15}{\sigma_2}\right)$$

이 때, $P\left(Z \geq \geq \frac{10}{\sigma_1}\right) = P\left(Z \leq \frac{-15}{\sigma_2}\right)$이므로

$\frac{10}{\sigma_1} = \frac{15}{\sigma_2}$

$\therefore$ $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

답 ①

18.

$\sum_{k=1}^{10} (k+2)(k-2)$

$= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 4)$

$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times 10$

$= 385 - 40 = 345$

답 345

19.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{12}{1 - \frac{1}{3}} = 18$$

답 18

20.

진수 조건에서 $x-3>0$, $x+1>0$이어야 하므로

$x>3$ ⋯ ㉠

주어진 부등식을 변형하면

$\log_3(x-3)(x+1)<\log_3 12$

$(x-3)(x+1)<12$,

$x^2-2x-15=(x-5)(x+3)<0$

$\therefore\ -3<x<5$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡의 공통범위는

$3<x<5$

$\therefore\ ab=3\times5=15$

답 15

21.

$a^{2x}-a^x=2$ $(a>0,\ a\neq1)$에서

$a^x=t(>0)$이라 하면

$t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

$t>0$ 이므로 $t=2$

즉, $a^x=2$

$\therefore\ x=\log_a 2=\frac{1}{7}$

$\therefore\ 2=a^{\frac{1}{7}}$

$\therefore\ a=2^7=128$

답 128

22.

$(x+a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6C_r a^{6-r}x^r$

$x^4$의 계수가 $x^5$의 계수의 50배이므로

${}_6C_4 a^2=50\,{}_6C_5 a$

$15a^2=300a$

$\therefore\ a=20$ $(\because a>0)$

답 20

23.

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=125$

세 수 $\alpha, \beta-\alpha, \beta$가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha\beta$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha\beta$

$(\alpha+\beta)^2=5\alpha\beta$

$k^2=5\cdot125=625$

$k>0$ 이므로 $k=25$

답 25

24.

20개의 야구공 중에서 5개를 임의추출 할 때 그 중에 별모양이 그려진 야구공이 포함되어 있으면 경품을 받을 수 있으므로

경품을 받을 확률은

$\frac{{}_{19}C_4}{{}_{20}C_5}=\frac{1}{4}$

경품을 받지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 3상자를 구입하여 경품을 2개 받을 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$$
$$\therefore\ p+q=64+9=73$$

답 73

25.

$V_k=\frac{k+1}{k}$ 이므로

$$D_k=20\log V_k=20\log\frac{k+1}{k}$$
$$\therefore\ S_9=\sum_{k=1}^{9}D_k$$
$$=20\left(\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{10}{9}\right)$$
$$=20\left(\log\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{10}{9}\right)$$
$$=20\log 10=20$$

답 20

26.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0\\0&6\end{pmatrix}$$

$=6E$ ( $E$는 단위행렬)

이므로

$$A^3=A^2A=6E\cdot A=6A$$
$$A^4=(6E)^2=6^2E$$
$$A^5=A^4A=6^4A$$
$$A^6=(6E)^3=6^3E$$
……
$$A^{10}=6^5E$$
$$A^{11}=6^5A=\begin{pmatrix}0&2\cdot 6^5\\3\cdot 6^5&0\end{pmatrix}$$
$$\therefore\ c=3\cdot 6^5=2^5\cdot 3^6$$

답 ③

27.

3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공의 색깔이 모두 다른 사건을 $A$라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

답 ①

28.

$p_1$, $p_2$, $p_3$가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2p_2=p_1+p_3$$

이 때, $p_1+p_2+p_3=1$ 이므로

$$2p_2=1-p_2$$
$$\therefore\ p_2=\frac{1}{3}$$

한편, $p_2=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)\times(b-a)$

$$=\frac{1}{4}\times(a+b)\times(b-a)=\frac{1}{3}$$

이 때, $a+b=\frac{4}{3}$ …㉠

이므로 $b-a=1$ …㉡

㉠, ㉡에서

$$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{7}{6}$$

답 ④

29.

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

| | A | B | A ∩ B | A ∪B |
|---|---|---|---|---|
| 여학생 | 45 | 72 | 17 | 100 |
| 남학생 | 105 | 108 | 13 | 200 |
| 계 | 150 | 180 | 30 | 300 |

따라서 구하는 확률은

$$P(\text{여}|A\cap B)=\frac{17}{30}$$

답 ④

30.

$$\log\frac{x^2}{y}=\log x^2-\log y$$
$$=2\log x-\log y$$
$$=2(6+\alpha)-(1+\beta)$$
$$=11+2\alpha-\beta$$

이 때, $0<2\alpha<\frac{1}{2}$, $-1<-\beta<-\frac{1}{2}$ 이므로

$-1<2\alpha-\beta<0$

따라서, $\log\frac{x^2}{y}=11+2\alpha-\beta$

$$=10+(1+2\alpha-\beta)$$

이고 $\frac{x^2}{y}$의 정수 부분이 $n$자리의 수이므로

$n-1=10$

$\therefore\ n=11$

답 11