2008학년도 9월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$$\log_{\frac{1}{2}}2+\log_7\frac{1}{7}=-\log_2 2-\log_7 7$$

$$=-1-1=-2$$

답 ①

2.

극한값이 존재하고 $x\to1$ 일 때,

$\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to1}(ax+b)=a+b=0$

$\therefore\ b=-a$

$$\lim_{x\to1}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=\lim_{x\to1}\frac{ax-a}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to1}a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})$$

$$=2\sqrt{2}a=2\sqrt{2}$$

$\therefore\ a=1$

따라서, $a=1$, $b=-1$ 이므로

$ab=-1$

답 ③

3.

$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$에서

$$X=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&2\\-10&-3\end{pmatrix}$$

따라서 X의 모든 성분의 합은 -5이다.

답 ⑤

4.

$\sqrt{x^2+5x}=t\ (t>0)$로 치환하면

$t^2+5t-6=(t+6)(t-1)=0$

$\therefore\ t=1$

이 때, $x^2+5x=1$ 즉, $x^2+5x-1=0$이므로 근과 계수의 관계에서 모든 실근의 합은 -5이다.

답 ④

5.

구간 $[0,2]$에서

$$|x^2(x-1)|=\begin{cases}-x^3+x^2 & (0\le x<1)\\ x^3-x^2 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore\ \int_0^2|x^2(x-1)|dx$$

$$=\int_0^1(-x^3+x^2)dx+\int_1^2(x^3-x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{2}$$

답 ①

6.

두 평면의 법선벡터는

$\overrightarrow{h_1}=(2,\ -1,0)$, $\overrightarrow{h_2}=(1,\ -3,\ k)$

두 평면이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}=|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|\cos60^\circ$$

에서

$$2+3+0=\sqrt{5}\times\sqrt{k^2+10}\times\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{5k^2+50}=10$$

$$k^2=10$$

$$\therefore\ k=\sqrt{10}\ (\because k>0)$$

답 ④

7.

ㄱ. $f(-3)=\dfrac{(-3)^2}{2\cdot(-3)-|-3|}$

$=\dfrac{9}{-6-3}=-1$ (거짓)

ㄴ. $x>0$ 이면

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-|x|}=\frac{x^2}{2x-x}$$

$=\dfrac{x^2}{x}=x$ (참)

ㄷ. $x>0$ 일 때, $f(x)=x$

$x<0$ 일 때, $f(x)=\dfrac{1}{3}x$ 이므로

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}x=0$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{1}{3}x=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)=0$$

$f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ 이므로

$a=0$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

8.

정육면체 A안에 내접하고 있는 구의 중심의 좌표는 (3, 1, 3)

정육면체 B안에 내접하고 있는 구의 중심의 좌표는 (3, 3, 1)

정육면체 C안에 내접하고 있는 구의 중심의 좌표는 (1, 3, 1)

이므로 3개의 구의 중심을 연결한 삼각형의 무게중심의 좌표 $(p,\ q,\ r)$ 는

$$p=\frac{3+3+1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$q=\frac{1+3+3}{3}=\frac{7}{3}$$

$$r=\frac{3+1+1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ p+q+r=\frac{7+7+5}{3}=\frac{19}{3}$$

답 ②

9.

쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 에서

ㄱ. 점근선의 방정식은

$y=\pm x$ 이다. (참)

ㄴ. 쌍곡선 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$x_1x-y_1y=1$$

$$\therefore\ y=\frac{x_1}{y_1}x-\frac{1}{y_1}$$

이 접선이 점근선과 평행하려면

$\dfrac{x_1}{y_1}=1$ 또는 $\dfrac{x_1}{y_1}=-1$

즉, $x_1=\pm y_1$ 이어야 한다.

이 때, 점 (x_1, y_1)은 점근선 $y=\pm x$위의 점이어야 하므로 모순이다.

따라서 쌍곡선 위의 점에서 그은 접선 중 점근선과 평행한 접선은 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. $y^2=4px$ 를 $x^2-y^2=1$ 에 대입하여 정리하면

$x^2-4px-1=0$

이 때 $\dfrac{D}{4}=(2p)^2-(-1)=4p^2+1>0$

이므로 포물선과 쌍곡선의 교점은 항상 2개이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

10.

건전지의 수명은 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(m, \left(\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이 때, 주어진 확률은

$P(m-0.5\leq \overline{X}\leq m+0.5)$

$=P\left(\dfrac{(m-0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\leq \dfrac{\overline{X}-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\leq \dfrac{(m+0.5)-m}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{6}\leq Z\leq \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=2P\left(0\leq Z\leq \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)$

$=0.8664$

이므로

$P\left(0\leq Z\leq \dfrac{\sqrt{n}}{6}\right)=0.4332$

따라서 표준정규분포표를 이용하면

$\dfrac{\sqrt{n}}{6}=1.5$이므로

$n=81$

답 ③

11.

$n=k\,(k\geq 2)$ 일 때 성립한다고 가정하면

$a_k=\dfrac{k+1}{3}$ 이다.

$A_{k+1}=\{1, 2, \cdots, k, k+1\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합은,

A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합에 k개의 집합

$\{1, k+1\}, \{2, k+1\}, \cdots, \{k, k+1\}$

을 추가한 것이다.

A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 부분집합의 개수는 $\boxed{{}_kC_2}$이고,

$a_k=\dfrac{k+1}{3}$ 이므로 ${}_kC_2$개의 부분집합에서 작은 원소를 뽑아 더한 합은

${}_kC_2\times\dfrac{k+1}{3}$

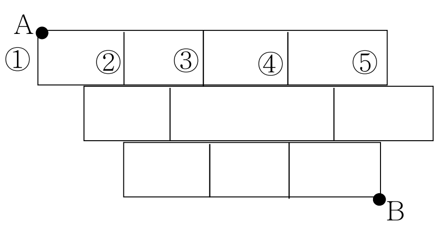
$\therefore\ a_{k+1}$

$=\dfrac{\boxed{{}_kC_2\times\frac{k+1}{3}}+(1+2+\cdots+k)}{{}_{k+1}C_2}$

$=\dfrac{k+2}{3}=\dfrac{(k+1)+1}{3}$

답 ②

12.



①번 길을 이용하여 B로 가는 경우

$1+3+4=8$ (가지)

②번 길을 이용하여 B로 가는 경우

$3+1=4$ (가지)

③번 길을 이용하여 B로 가는 경우

1 (가지)

④번 길을 이용하여 B로 가는 경우

1 (가지)

⑤번 길을 이용하여 B로 가는 경우는 최단 거리로 가는 경우가 아니다.

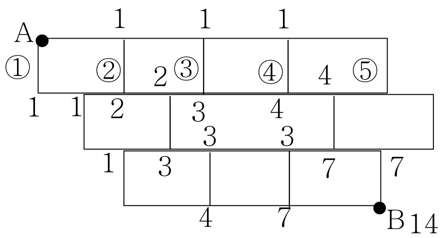
따라서 구하는 경우의 수는

$8+4+1+1=14$ (가지)

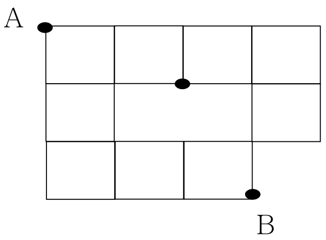
답 ①

[다른 풀이]

(1) 각 갈림길까지 최단경로로 가는 경우의 수를 적으면 다음과 같다.



(2) 구하는 최단경로의 수는 다음 그림에서 A에서 B로 가는 최단경로의 수와 같다.



$\therefore \dfrac{6!}{3!\times3!}-\dfrac{3!}{2!}\times2!$

$=20-6=14$

13.

삼각형의 무게중심은 중선을 꼭지점으로부터 $2:1$ 로 내분한다.

따라서 한 변의 길이가 a 인 정사각형 A_{n-1} 내부에 들어 있는 작은 정사각형 A_n 의 한 변의 길이는 대각선 길이의 $\dfrac{1}{3}$ 이므로 $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1+S_2+S_3+\cdots$$

$$=3^2+2+\frac{2}{9}+\cdots$$

$$=\frac{9}{1-\frac{2}{9}}=\frac{81}{7}$$

답 ⑤

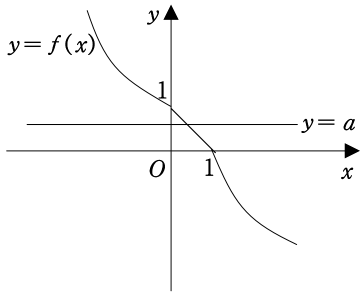
14.

ㄱ. $\{f(-3)\}^2=(a^{-3})^5=a^{-15}$

$f(-15)=a^{-15}$

$\therefore$ $\{f(-3)\}^2=f(-15)$ (참)

ㄴ. $0<a<1$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서, $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 한 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $y=a^x$ 의 역함수는 $y=\log_a x$ 이므로

$y=a^x\,(x\le0)$ 의 그래프와

$y=\log_a x\,(x\ge1)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서, ㄴ에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15.

ㄱ. $8A=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$이므로

$$L(8A)=\begin{pmatrix} \log_2 8 & \log_2 8 \\ \log_2 8 & \log_2 8 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \log_2 2^3 & \log_2 2^3 \\ \log_2 2^3 & \log_2 2^3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$=3A$ <참>

ㄴ. $L(A)=E$에서

$$\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이므로

$\log_2 a=1$, $\log_2 b=0$, $\log_2 c=1$, $\log_2 d=0$

$\therefore$ $a=2$, $b=1$, $c=2$, $d=1$

이 때, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$이고 $2\cdot 2-1\cdot 1\neq 0$

이므로 행렬 A는 역행렬을 갖는다. <참>

ㄷ. $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

이므로

$$L(A^2)=\begin{pmatrix} \log_2(a^2+bc) & \log_2(ab+bd) \\ \log_2(ca+dc) & \log_2(cb+d^2) \end{pmatrix}$$

$$2L(A)=2\begin{pmatrix} \log_2 a & \log_2 b \\ \log_2 c & \log_2 d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \log_2 a^2 & \log_2 b^2 \\ \log_2 c^2 & \log_2 d^2 \end{pmatrix}$$

이 때, $L(A^2)=2L(A)$ 이려면

$a^2+bc=a^2\cdots$㉠, $ab+bd=b^2$

$ca+dc=c^2$, $cb+d^2=d^2$

㉠에서 $bc=0$이므로 $b>0$, $c>0$에 모순이다.

따라서, $L(A^2)=2L(A)$를 만족시키는 행렬 A가 존재하지 않는다. <거짓>

답 ③

16.

$a_3=14$, $a_4=26$, $a_5=38$,

$\cdots$

$a_{n+1}=a_n+12$ ($n\geq 3$)

을 추론할 수 있다.

$b_k=a_{k+2}$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)로 두면

$b_1=14$, $b_2=26$

$b_{k+1}-b_k=12$

$\therefore$ $b_k=12k+2$

$\therefore$ $a_{20}=b_{18}=12\times 18+2$

$=218$

답 ②

[다른풀이]

$a_3=14$, $a_4=26$, $a_5=38$,

$\cdots$

$a_{n+1}=a_n+12$ ($n\geq 3$)

을 추론할 수 있다.

$\therefore$ $a_{20}=a_3+17\times 12$

$=14+17\times 12$

17.

과자 A의 길이 X가 $m+10$ 이상일 확률은

$$P(X\geq m+10)=P\left(Z\geq \frac{10}{\sigma_1}\right)$$

과자 B의 길이 Y가 $m+10$ 이하일 확률은

$$P(Y \leq m+10)=P\left(Z \leq \frac{-15}{\sigma_2}\right)$$

이 때, $P\left(Z \geq \frac{10}{\sigma_1}\right)=P\left(Z \leq \frac{-15}{\sigma_2}\right)$이므로

$$\frac{10}{\sigma_1}=\frac{15}{\sigma_2}$$

$$\therefore \ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

답 ①

18.

$f'(x)=3x^2+5x$ 이므로

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=f'(2)$$
$$=3 \cdot 2^2+5$$
$$=17$$

답 17

19.

$f(x)=6x^2+1$이라 하고 $f(x)$의 부정적분을

$F(x)$라 하면

$$S(h)=\int_{1-h}^{1+h} f(x)dx$$
$$=\left[F(x)\right]_{1-h}^{1+h}$$
$$=F(1+h)-F(1-h)$$

따라서

$$\lim_{h \to 0+} \frac{S(h)}{h}=\lim_{h \to 0+} \frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0+} \frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h \to 0+} \frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$

$$=2F'(1)$$
$$=2f(1)$$
$$=2 \times 7=14$$

답 14

20.

$x^2+9y^2=9$ 에서 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

$a^2=9$, $b^2=1$

$\therefore \ a=3$, $b=1$

두 초점의 좌표를 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$라 하면

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$
$$=\sqrt{3^2-1}$$
$$=2\sqrt{2}$$

$\therefore \ d=4\sqrt{2}$

$\therefore \ d^2=32$

답 32

21.

$a^{2x}-a^x=2$ $(a>0,\ a \neq 1)$에서

$a^x=t(>0)$이라 하면

$t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

$t>0$ 이므로 $t=2$

즉, $a^x=2$

$\therefore \ x=\log_a 2=\frac{1}{7}$

$\therefore \ 2=a^{\frac{1}{7}}$

$\therefore \ a=2^7=128$

답 128

22.

$F(x) = f(x)g(x)$라 하면

$F(0) = f(0)g(0) = 4$이므로

(나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0)$$

$= f(0)g'(0) + f'(0)g(0)$

=1×g`'(0) +(-6)4 =

$= g'(0) - 24 = 0$

$\therefore\ g'(0) = 24$

답 24

23.

원 $x^2+y^2=1$ 위의 한 점 $B(1,0,0)$과

점 $A(0,0,3)$을 지나는 직선의 방정식은

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{z}{3}$, $y=0$

따라서, 이 직선과 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$

의 교점을 D라 하면

$\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{z}{3} = t,$ $y=0$에서

$D(-t+1, 0, 3t)$ ($\dfrac{1}{3} < t < 1$)

이 때, 점 $D(-t+1, 0, 3t)$는 구

$x^2+y^2+(z-2)^2=1$ 위의 점이므로

$(-t+1)^2 + (3t-2)^2 = 1$

$10t^2 - 14t + 4 = 0$, $5t^2 - 7t + 2 = 0$

$(5t-2)(t+1) = 0$

$\therefore\ t = \dfrac{2}{5}$ ($\because \dfrac{1}{3} < t < 1$)

또한, 구하고자 하는 도형은 점 $D(\dfrac{3}{5}, 0, \dfrac{6}{5})$을

지나면서 xy평면에

평행한 평면과 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$의 교선이므로

$x^2+y^2+(\dfrac{6}{5}-2)^2 = 1$, $x^2+y^2 = \dfrac{9}{25}$

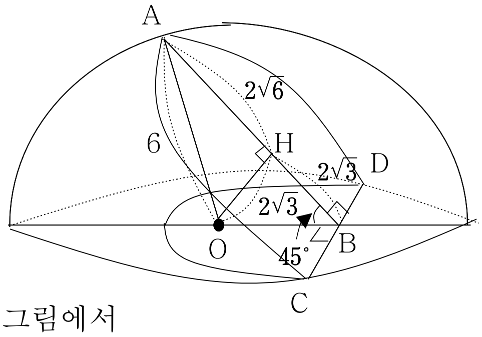
따라서, 도형 전체의 길이는

$\dfrac{b}{a}\pi = 2\times\dfrac{3}{5}\pi = \dfrac{6}{5}\pi$

$\therefore\ a+b = 11$

답 11

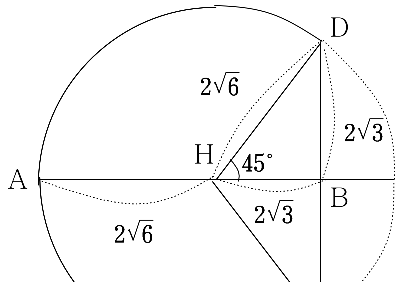
24.



위의 그림에서

$\overline{AH} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$, $\overline{BH} = 2\sqrt{3}$

이고 평면 α와 45° 의 각을 이루는 평면으로 반구를 자른 단면은 다음 그림과 같다.



즉, $\overline{BD} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$\angle DHB = 45^\circ$

따라서, 단면의 넓이는

$(2\sqrt{6})^2\pi\times\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6} = 18\pi + 12$

따라서, 이 단면을 평면 α 위로의 정사영한

넓이가 $\sqrt{2}(a+b\pi)$ 이므로

$$\sqrt{2}(a+b\pi)=(18\pi+12)\cos 45^\circ$$

$$=(18\pi+12)\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\sqrt{2}(9\pi+6)$$

$\therefore\ a+b=15$

답15

25.

$V_k=\dfrac{k+1}{k}$ 이므로

$$D_k=20\log V_k=20\log\frac{k+1}{k}$$

$$\therefore S_9=\sum_{k=1}^{9}D_k$$

$$=20\left(\log\frac{2}{1}+\log\frac{3}{2}+\log\frac{4}{3}+\cdots+\log\frac{10}{9}\right)$$

$$=20\left(\log\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{10}{9}\right)$$

$$=20\log 10=20$$

답 20

미분과 적분

26.

$$(\sin x+\sin y)^2$$

$$=\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y=1$$

$$(\cos x+\cos y)^2=\cos^2 x+\cos^2 y+2\cos x\cos y$$

$$=\frac{1}{4}$$

위 두 등식의 변끼리 더하면

$$1+1+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=1+\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \sin x\sin y+\cos x\cos y=-\frac{3}{8}$$

$$\therefore\ \cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$=-\frac{3}{8}$$

답 ④

27.

$\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ $(0\le x\le 1)$의 길이를 의미하므로

이 길이의 최소값은 두 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ \sqrt{3})$ 을 잇는 선분의 길이와 같다.

따라서 구하는 최소값은

$$\sqrt{(1-0)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=2$$

답 ②

28.

t초 후에 선분 OP와 y축이 이루는 각의 크기를 Θ라 하면

점 P의 좌표는 $(10\sin\Theta,\ 10\cos\Theta)$이므로 속력 v는

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\Theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\Theta}\right)^2}\,\frac{d\Theta}{dt}$$

$$=\sqrt{(10\cos\Theta)^2+(-10\sin\Theta)^2}\,\frac{d\Theta}{dt}$$

$$=10\frac{d\Theta}{dt}$$

$$=2$$

$$\therefore\ \frac{d\Theta}{dt}=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt}=-10\sin\Theta\frac{d\Theta}{dt}=-2\sin\Theta$$

이므로

$\angle AOP=30°$ 인 순간의 점 P의 y좌표의 시간에 대한 변화율은

$$-2\sin 30°=-1$$

답 ④

29.

$$a=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}=2\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{2t}$$

$$=2\cdot1=2$$

이므로 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x\geq1)\\ 2 & (x<1)\end{cases}$

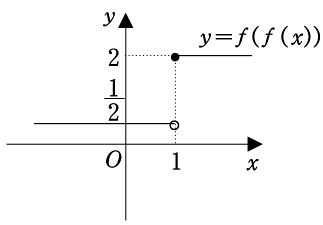
ㄱ. $f(1)=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(f(1))=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ (참)

ㄷ. $x\geq1$ 일 때, $f(f(x))=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

$x<1$ 일 때, $f(f(x))=f(2)=\frac{1}{2}$

이므로 $y=f(f(x))$ 의 그래프는 다음과 같다.



$\lim_{x\to1-0}f(f(x))=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to1+0}f(f(x))=2$ 이므로

$\lim_{x\to1-0}f(f(x))\neq\lim_{x\to1+0}f(f(x))$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30.

$$V=\pi\int_1^e(5\sqrt{\ln x})^2dx$$

$$=25\pi\int_1^e\ln x\,dx$$

$$=25\pi[x\ln x-x]_1^e$$

$$=25\pi(e-e+1)=25\pi$$

$$\therefore\ \frac{V}{\pi}=\frac{25\pi}{\pi}=25$$

답 25

확률과 통계

26.

구하고자 하는 확률은

$$\frac{{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2}{{}_9C_2}=\frac{1+3+\frac{4\times3}{2}}{\frac{9\times8}{2}}$$

$$=\frac{1+3+6}{36}$$

$$=\frac{5}{18}$$

답 ④

27.

$$P\left(\frac{5}{4}\leq X\leq4\right)$$

$= P(0 \leq X \leq 4) - P\left(0 \leq X \leq \frac{5}{4}\right)$

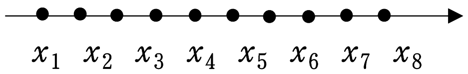
$= g(4) - g\left(\frac{5}{4}\right)$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

답 ③

28.

10개의 자료 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$이 이 순서로 공차가 양수인 등차수열을 이루므로
이 수열의 공차를 d라 하자.
이들 자료를 수직선 위에 같은 간격으로 나열하면 다음과 같다.



ㄱ. 위의 수직선에서 x_1, x_3, x_5, x_7, x_9의 평균은 x_5이고

$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$의 평균은

$\frac{x_5 + x_6}{2} = x_5 + \frac{d}{2}$ (거짓)

ㄴ. 위의 수직선에서 $x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$의 평균은 x_8,

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 평균은 x_3이므로

$|x_8 - x_3| = 5d$ (참)

ㄷ. 위의 수직선에서 x_1, x_3, x_5, x_7, x_9과 평균 x_5의 편차는

각각 $-2d, -d, d, 2d$이고

$x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}$과 평균 x_6의 편차도

각각 $-2d, -d, d, 2d$이므로
두 자료의 분산은 서로 같다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

29.

주어진 학급의 멀리뛰기 기록은 정규분포 $N(196.8, 10^2)$을 따르므로 4명의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(196.8, \frac{10^2}{4}\right)$

즉, $N(196.8, 5^2)$을 따른다.

이 학급이 예선을 통과할 확률이 0.8770이므로

$P(\overline{X} > L)$

$= P\left(\frac{\overline{X} - 196.8}{5} > \frac{L - 196.8}{5}\right)$

$= P\left(Z > \frac{L - 196.8}{5}\right)$

$= 0.8770$

한편, 표준정규분포표를 이용하면

$$\begin{aligned} P(Z > -1.16) &= P(-1.16 < Z < 0) + P(Z > 0) \\ &= P(0 < Z < 1.16) + 0.5 \\ &= 0.3770 + 0.5 \\ &= 0.8770 \end{aligned}$$

이므로

$\frac{L - 196.8}{5} = -1.16$

$\therefore L = 191$

답 ②

30.

주어진 5개의 자료의 평균은

$\frac{8+9+11+12+15}{5} = \frac{55}{5} = 11$

이므로 $E(\overline{X}) = m = 11$

주어진 5개의 자료의 분산은

$\frac{(-3)^2 + (-2)^2 + 0 + 1^2 + 4^2}{5} = \frac{30}{5} = 6$

이므로 $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{24} = 6$

$\sigma^2 = 144 \quad \therefore \ \sigma = 12$

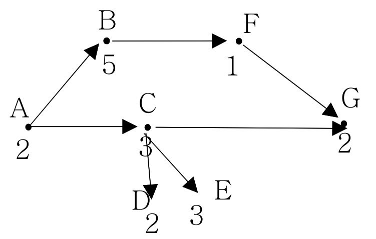
$\therefore \ m + \sigma = 11 + 12 = 23$

답 23

이산수학

26.

주어진 표를 수형도로 나타내면



시작에서 끝까지의 모든 경로와 그 때의 작업시간은 다음과 같다.

A→B→F→G: $2+5+1+2=10$(일)

A→C→G : $2+3+2=7$(일)

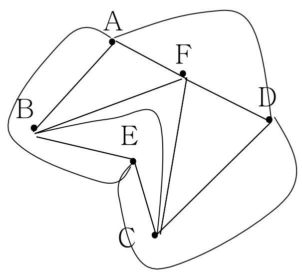
A→C→D : $2+3+2=7$(일)

A→C→E : $2+3+3=8$(일)

따라서 이 작업을 끝마치는데 필요한 최소의 시간은 10일이다.

답 ④

27.



ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 그래프의 각 점을 A, B, C, D, E, F 라고 하면 변이 꼭지점에서만 만나게 평면 위에 그릴 수 있으므로 평면그래프이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 ABECDFA 로 해밀턴회로가 존재한다. (참)

ㄷ. A와 C, B와 D, E와 F를 연결하면 서로 다른 두 꼭지점 사이에 항상 변이 존재한다. 따라서 3개의 변을 추가하면 완전그래프가 된다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

28.

$8, 9, 10$ 으로 이루어진 6개의 점수를 순서를 고려하지 않고 나열하는 방법의 수는 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉, ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$(가지)

이 때, 점수의 합이 51점 미만이 되는 경우는

$(8, 8, 8, 8, 8, 8)$,

$(8, 8, 8, 8, 8, 9)$,

$(8, 8, 8, 8, 9, 9)$,

$(8, 8, 8, 8, 8, 10)$

의 4가지이다.

따라서, 구하는 경우의 수는

$28 - 4 = 24$(가지)

답 ④

29.

(i) 꼭지점 c와 d, e와 f, g와 h가 모두 하나의 변으로 연결된 경우

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 8 \text{ (개)}$$

(ii) 꼭지점 c와 d, e와 f는 하나의 변으로 연결되고, g와 h는 연결되지 않은 경우

$${}_2C_1 \times {}_4C_3 = 8 \text{ (개)}$$

(iii) 꼭지점 c와 d, g와 h는 하나의 변으로 연결되고, e와 f는 연결되지 않은 경우

$${}_4C_3 \times {}_2C_1 = 8 \text{ (개)}$$

(iv) 꼭지점 e와 f, g와 h는 하나의 변으로 연결되고, c와 d는 연결되지 않은 경우

$${}_2C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 4 \text{ (개)}$$

(v) 꼭지점 c와 d는 하나의 변으로 연결되고, e와 f, g와 h는 연결되지 않은 경우

$${}_6C_5 = 6 \text{ (개)}$$

(vi) 꼭지점 e와 f는 하나의 변으로 연결되고, c와 d, g와 h는 연결되지 않은 경우

$${}_2C_2 \times {}_4C_3 = 4 \text{ (개)}$$

(vii) 꼭지점 g와 h는 하나의 변으로 연결되고, c와 d, e와 f는 연결되지 않은 경우

$${}_4C_4 \times {}_2C_1 = 2 \text{ (개)}$$

(viii) 꼭지점 c와 d, e와 f, g와 h 중 하나의 변으로 연결된 경우가 없는 경우

$${}_6C_6 = 1 \text{ (개)}$$

이상에서 구하는 생성수형도의 개수는

$$8+8+8+4+6+4+2+1=41$$

답 ②

30. $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ 에서

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

$$\therefore\ a_{n+1}-a_n=(3-1)2^{n-1}=2^n$$

$$\therefore\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$$

$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=2^n-1$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{7}a_n=\sum_{n=1}^{7}(2^n-1)$$

$$=\frac{2(2^7-1)}{2-1}-1\times7=247$$

답 247

[다른 풀이]

$$a_3=3a_2-2a_1=3\times3-2\times1=7$$

$$a_4=3a_3-2a_2=3\times7-2\times3=15$$

$$a_5=3a_4-2a_3=3\times15-2\times7=31$$

$$a_6=3a_5-2a_4=3\times31-2\times15=63$$

$$a_7=3a_6-2a_5=3\times63-2\times31=127$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{7}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_7$$

$$=1+3+7+15+31+63+127$$

$$=247$$