“나형 “ 정답

1	③	*2*	②	*3*	①	*4*	④	*5*	②
6	④	*7*	②	*8*	③	*9*	①	*10*	③
11	①	*12*	⑤	*13*	②	*14*	②	*15*	④
16	③	*17*	⑤	*18*	12	*19*	504	*20*	20
21	11	*22*	10	*23*	10	*24*	33	*25*	100
26	⑤	*27*	④	*28*	②	*29*	③	*30*	19

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$8^{\frac43}\times4^{\frac23}\div2^{\frac13}=2^4\times2^{\frac43}\div2^{\frac13}$
$=2^{4+\frac43-\frac13}=2^5$

2. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬의 곱 계산하기

$A=B^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$에서 $BA=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ 이므로
$BAB=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&6\\-14&16\end{pmatrix}$
$\therefore$ (모든 성분의 합) $=3$

3. [출제의도] 무리식의 극한값 계산하기

$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+1)-(n^2-n-1)\}}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$
$=1$

4. [출제의도] 등차수열의 공차 구하기

수열 a_n 의 첫째항을 a
수열 b_n 의 첫째항을 b 라고 할 때,
$3a_n+5b_n=3a-6(n-1)+5b+15(n-1)$
$=3a+5b+9(n-1)$
$\therefore$ 수열 $\{3a_n+5b_n\}$ 의 공차는 9

5. [출제의도] 로그함수의 역함수 이해하기

$f(m)=2$ 이므로 $a^2=m$
$f(n)=3$ 이므로 $a^3=n$
$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$
$k=a^7=(a^2)^2a^3=m^2n$

6. [출제의도] 로그 부등식의 해 구하기

진수 $x-4>0$, $x-2>0$이므로 $x>4$
주어진 로그의 밑이 1보다 작으므로
$(x-4)^2<x-2$, $\quad 3<x<6$
따라서 만족하는 로그부등식의 해는
$4<x<6$
$\therefore\ ab=24$

7. [출제의도] 정의된 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&m+n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&m+n\end{pmatrix}$
(거짓)
ㄴ. $\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&mn\end{pmatrix}$ (참)
ㄷ. $\frac1n\begin{pmatrix}n&0\\0&1\end{pmatrix}\neq\frac1n\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}$ (거짓)

8. [출제의도] 수학외적상황에서 경우의 수 구하기

먼저 남자 5명을 좌석에 배치하는 방법의 수는 3가지 경우가 있다.

남		남
남		남
	남	

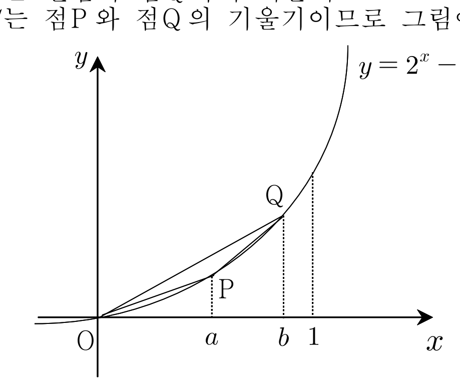
남		남
	남	
남		남

	남	
남		남
남		남

여기서 남자끼리 자리를 배치하는 방법은 5!
비어있는 4자리에 여자를 배치하는 방법은 4!
$\therefore$ (전체 경우의 수)$=3\times4!\times5!$ (가지)

9. [출제의도] 직선의 기울기를 이용하여 크기 비교하기

A는 원점과 점P 와의 기울기
B는 원점과 점Q 와의 기울기
C는 점P 와 점Q 의 기울기이므로 그림에서



$\therefore\ A<B<C$

10. [출제의도] 밑의 범위에 따른 로그함수의 그래프 이해하기

$0<x<1$ 인 범위에서 $\log_a x>\log_b x$ 이기 위해서는 $\log_a x-\log_b x>0$이어야 한다. 따라서,
$1<b<a$, $0<a<1<b$, $0<b<a<1$
$\therefore$ 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

11. [출제의도] 무한등비급수를 이용하여 문제 해결하기

점 $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots$ 에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\cdots$라 하면 n이 한없이 커질 때, A_n의 x좌표는 $\overline{\mathrm{OC}_1}+\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}+\cdots$

$$x=\frac43+1+\frac34+\left(\frac34\right)^2+\cdots=\frac{\frac43}{1-\frac34}=\frac{16}{3}$$

12. [출제의도] 확률의 성질을 이용하여 문제해결하기

1회와 2회의 시행에서 검은 공과 흰 공을 한 번 뽑고, 3회에는 반드시 흰 공을 뽑을 확률이므로
○ × ○ : $\frac12\times\frac23\times\frac13=\frac19$
× ○ ○ : $\frac12\times\frac12\times\frac13=\frac1{12}$
$\therefore\ \frac19+\frac1{12}=\frac7{36}$

13. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 부등식의 증명 완성하기

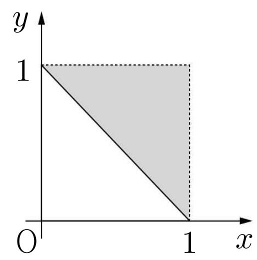
$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac1{2i-1}-\frac1{2i}\right)<\frac14\left(3-\frac1n\right)$ …㉠
ⅰ) $n=2$ 일 때,
(좌변) $=\left(1-\frac12\right)+\left(\frac13-\frac14\right)=\frac7{12}$
(우변) $=\frac14\left(3-\frac12\right)=\frac58$ 이므로 성립한다.
ⅱ) $n=k$ ($k\geq2$인 자연수)일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면 $\sum_{i=1}^{k}\left(\frac1{2i-1}-\frac1{2i}\right)<\frac14\left(3-\frac1k\right)$ …㉡
㉡식의 양변에 $\frac1{2(2k+1)(k+1)}$ 을 더하면
$\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac1{2i-1}-\frac1{2i}\right)<\frac14\left(3-\frac1k\right)+\frac1{2(2k+1)(k+1)}$
한편 $\frac14\left(3-\frac1k\right)+\frac1{2(2k+1)(k+1)}$ 에서
$2(2k+1)>4k$ 임을 이용하여
$\frac14\left(3-\frac1k\right)+\frac1{2(2k+1)(k+1)}$
$<\frac14\left(3-\frac1k\right)+\frac1{4k(k+1)}=\frac34-\frac1{4(k+1)}$
따라서 $n=k+1$ 일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 부등식 ㉠은 $n\geq2$인 모든 자연수에 대하여 성립한다.

14. [출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 확률 구하는 과정 완성하기

n개의 주사위를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6^n가지이다.
$X>1$ 의 여사건의 경우는 $X\leq1$ 인 경우로 $X=0$, $X=1$ 의 두 가지이다.
(ⅰ) $X=0$ 인 경우
n개의 주사위의 눈이 모두 같아야 되므로 경우의 수는 6가지이다.
(ⅱ) $X=1$ 인 경우
연속한 두 눈이 나와야 한다. 즉, 1과 2, 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6이 나와야 한다.
그런데 n개의 주사위를 던졌을 때 나오는 눈이 1 또는 2인 것은 2^n가지이고, 이 중에서 모두 1인 것과 2인 것은 제외해야 하므로 (2^n-2)가지이다. 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6인 경우도 마찬가지이므로 모든 경우의 수는 $(2^n-2)\times5$ 이다.
따라서, $\mathrm{P}(X\leq1)=\frac{6+(2^n-2)\times5}{6^n}$ 이다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$\mathrm{P}(X>1)=1-\mathrm{P}(X\leq1)$
$=1-\frac5{3^n}+\frac4{6^n}$

15. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하기

X는 정수 부분이 두 자리인 양의 정수이고 상용로그의 가수가 x이므로
$\log X=1+x$ $(0\leq x<1)$
Y는 정수 부분이 세 자리인 양의 정수이고 상용로그의 가수가 y이므로
$\log Y=2+y$ $(0\leq y<1)$
XY의 정수 부분은 다섯 자리이므로
$\log XY=\log X+\log Y$
$=3+x+y$ $(1\leq x+y<2)$
따라서 점 (x,y)가 존재하는 영역은 그림과 같다.

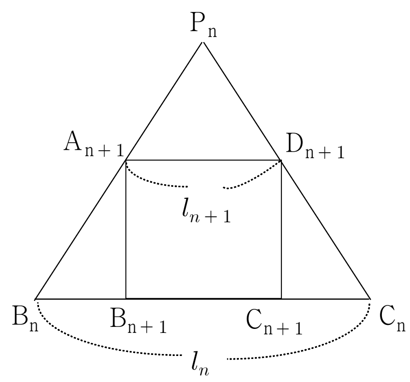


16. [출제의도] 조합의 수 성질을 이용하여 문제해결하기

어두운 부분의 합은
$\sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_{n-2}+{}_nC_{n-1}+{}_nC_n\right)$
$=\sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_2+{}_nC_1+1\right)$
$=\sum_{n=2}^{10}\left\{\frac{n(n-1)}2+n+1\right\}$
$=\sum_{n=2}^{10}\left(\frac12n^2+\frac12n+1\right)$
$=228$

(별해) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8={}_{11}C_8$
${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9$이므로
${}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9-{}_1C_0$
$1+{}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0={}_{11}C_{10}$이 므로
${}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0={}_{11}C_{10}-1-{}_1C_1$
따라서 어두운 부분의 합은 228

17. [출제의도] 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이의 합 구하기



$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 의 높이는
$\frac{\sqrt3}2l_n=l_{n+1}+\frac{\sqrt3}2l_{n+1}$ 이므로
$\frac{l_{n+1}}{l_n}=\frac{\sqrt3}{2+\sqrt3}=2\sqrt3-3$
따라서 첫째항은 16이고, 공비는 $(2\sqrt3-3)^2$ 인 무한등비급수의 합이다.
$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{16}{1-(2\sqrt3-3)^2}=6\sqrt3+10$

18. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_{\sqrt2}9^{\log_3 8}=\log_{2^{\frac12}}3^{2\log_3 8}=2\log_2 2^6=12$

19. [출제의도] 순열의 수를 이용하여 경우의 수 구하기

1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수 a,b를 선택하는 방법의 수 ${}_9C_2=36$ (가지)
4자리의 암호를 만들기 위해 나열하는 방법은
$abbb$: $\frac{4!}{3!}=4$
$aabb$: $\frac{4!}{2!\,2!}=6$
$aaab$: $\frac{4!}{3!}=4$ 이므로
$36\times(4+6+4)=504$(가지)

(별해) a,b를 이용하여 만든 네자리수는 $2^4=16$가지, a만, b만 이용하여 만든 네자리 수 2가지이므로
전체 경우의 수는 $36\times(2^4-2)=504$(가지)

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$\Gamma_A=\frac2{100}$, $\Gamma_B=\frac{20}{100}$
$A=20\log\frac1{|\Gamma_A|}=20\log\frac{100}2$
$B=20\log\frac1{|\Gamma_B|}=20\log\frac{100}{20}$
$\therefore\ |A-B|=20$

21. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 무한급수의 합 구하기

$\log_{10}x=[\log_{10}x]$ 이므로 $\log_{10}x$ 의 가수는 0

이다. 따라서 $\log_{10}x=n$(n은 음의 정수)

따라서 $x=\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \cdots,\ \frac{1}{10^n},\ \cdots$

$$S=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$$

$\therefore\ 99S=11$

22. [출제의도] S_n과 a_n사이의 관계를 이용하여 무한급수의 합 구하기

$b_n=2^{n-1}a_n$ 라 하고,

$S_n=a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=5n$ 이라 할 때,

$b_n=S_n-S_{n-1}=5\ (n\geq 2),\ b_1=S_1=a_1=5$

즉, $a_n=\frac{5}{2^{n-1}}(n\geq 1)$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{5}{1-\frac{1}{2}}=10$

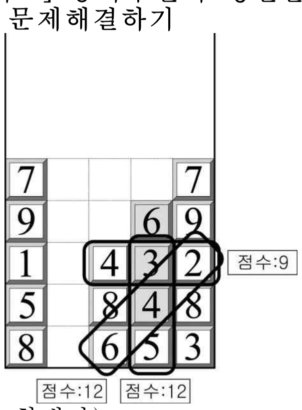
23. [출제의도] 수열의 일반항을 이용하여 수열의 합 구하기

$a_n=n(n+x-1)$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=330+55x=880$$

$\therefore\ x=10$

24. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기



$\therefore$ (득점의 최대값) $=12+12+9=33$

25. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$a+b=100\ \cdots$㉠

흘려 내린 물의 양을 M이라 할 때,

$B,\ C,\ D$ 물의 양은 차례대로

$M\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right),\ M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2,$

$M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)$

$B,\ C,\ D$가 등비수열을 이루므로

$$\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2\right\}^2=\left\{\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)\right\}\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)\right\}$$

$b^2=100a\ \cdots$㉡

㉠, ㉡에 의해

$b=50\sqrt{5}-50$

따라서 $p=50,\ q=50$

$\therefore\ p+q=100$

26. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬 간단히 하기

$AB+E=O$이므로

$A=-B^{-1},\ B=-A^{-1}$

$(A+B)(A+B)^{-1}=(A+B)\left(A^{-1}+B^{-1}\right)$

$E=E+AB^{-1}+BA^{-1}+E$

$E=E-A^2-B^2+E$

$\therefore\ A^2+B^2=E$

27. [출제의도] 무한수열과 무한급수의 성질 이해하기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고,

$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (상수)이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=0\times\beta=0$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\alpha,$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-2b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\beta$라 하면

$a_n=\frac{2c_n+d_n}{5},b_n=\frac{c_n-2d_n}{5}$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c_n+d_n}{5}=\frac{2}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta$$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n-2d_n}{5}=\frac{1}{5}\alpha-\frac{2}{5}\beta$ (참)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n,\ b_n=(-1)^n$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 모두 수렴하지 않는다. (거짓)

28. [출제의도] 수학외적인 상황에서 확률 구하기

가능한 경우의 수는 6가지

첫 번째 경우 : $A_1\to A_2\to A_1\to A_2\to A_3\to A_4$

두 번째 경우 : $A_1\to A_2\to A_3\to A_2\to A_3\to A_4$

세 번째 경우 : $A_1\to A_6\to A_1\to A_2\to A_3\to A_4$

네 번째 경우 : $A_1\to A_6\to A_1\to A_6\to A_5\to A_4$

다섯 번째 경우: $A_1\to A_6\to A_5\to A_6\to A_5\to A_4$

여섯 번째 경우: $A_1\to A_2\to A_1\to A_6\to A_5\to A_4$

$\therefore\ \frac{1}{2^5}\times 6=\frac{3}{16}$

29. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

역행렬을 갖지 않도록 하는 실수 x가 존재해야 하므로

$D=2\left(x^2+2x+a^2+b^2\right)-(x+1)(x-1)=0$

즉 $x^2+4x+2a^2+2b^2+1=0$ 이 실근을 가져야 하므로 $D/4=4-\left(2a^2+2b^2+1\right)\geq 0$

따라서 $a^2+b^2\leq\frac{3}{2}$

$\therefore$ (구하고자 하는 영역의 넓이) $=\frac{3}{2}\pi$

30. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

반지름의 길이가 a,c,b순으로 등차수열을 이루고, $a:b=3:1$이므로 $a=3k,\ b=k,\ c=2k$

높이는 $4k$

높이가 $2k$일 때의 커피잔 A의 부피는

$V_A=\frac{1}{3}\times\pi(2k)^2\times 4k-\frac{1}{3}\times\pi k^2\times 2k=\frac{14}{3}\pi k^3$

커피잔 B의 부피는 $V_B=\pi\times(2k)^2\times 2k=8\pi k^3$

따라서 $\frac{V_A}{V_B}=\frac{7}{12}=\frac{q}{p}$

$\therefore\ p+q=19$