수리 영역

"가형 " 정답

1	③	2	②	3	①	4	⑤	5	②
6	①	7	②	8	③	9	⑤	10	③
11	①	12	⑤	13	①	14	②	15	④
16	④	17	④	18	11	19	53	20	20
21	16	22	64	23	10	24	33	25	100

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$$8^{\frac{4}{3}}\times 4^{\frac{2}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}=2^4\times 2^{\frac{4}{3}}\div 2^{\frac{1}{3}}$$
$$=2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=2^5$$

2. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분 계산하기

$$\int_{-a}^{a}(2x+3)dx=\int_{-a}^{a}2x\,dx+\int_{-a}^{a}3\,dx$$
$$=3a-(-3a)=6a=6$$

$\therefore\ a=1$

3. [출제의도] 평균변화율과 미분계수의 정의 이해하기

x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은 $\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{3a^2-2a}{a}=3a-2$

$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)=4$이므로

$3a-2=4$

$\therefore\ a=2$

4. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 극한값 계산하기

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=f(2)$$
$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)dt=15$$

5. [출제의도] 로그함수의 역함수 이해하기

$f(m)=2$이므로 $a^2=m$

$f(n)=3$이므로 $a^3=n$

$f^{-1}(7)=k$라 하면 $f(k)=7$

$k=a^7=(a^2)^2a^3=m^2n$

6. [출제의도] 무리방정식의 실근과 무연근 이해하기

$x-b=-\sqrt{ax}$의 실근이 α,

$x-b=\sqrt{ax}$의 실근이 β

따라서 $(x-b)^2=ax$의 두 실근이 α,β

$x^2-(2b+a)x+b^2=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합 $a+2b=10$

7. [출제의도] 정의된 행렬의 성질 이해하기

ㄱ. $\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&m+n\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&m+n\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $\begin{pmatrix}1&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&mn\end{pmatrix}$ (참)

ㄷ. $\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}n&0\\0&1\end{pmatrix}\neq\dfrac{1}{n}\begin{pmatrix}1&0\\0&n\end{pmatrix}$ (거짓)

8. [출제의도] 수학외적상황에서 경우의 수 구하기

먼저 남자 5명을 좌석에 배치하는 방법의 수는 3가지 경우가 있다.

남		남
남		남
	남	

남		남
	남	
남		남

	남	
남		남
남		남

여기서 남자끼리 자리를 배치하는 방법은 5!

비어있는 4자리에 여자를 배치하는 방법은 4!

∴ (전체 경우의 수)$=3\times 4!\times 5!$ (가지)

9. [출제의도] 도형에서 극한값 계산하기

삼각형 OAB에서 내접원의 반지름의 길이를 r이라할 때

삼각형의 넓이 : $\dfrac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{2}r=\dfrac{1}{2}x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{r}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$$

10. [출제의도] 밑의 범위에 따른 로그함수의 그래프 이해하기

$0<x<1$인 범위에서 $\log_a x>\log_b x$ 이기 위해서는 $\log_a x-\log_b x>0$이어야 한다. 따라서,

$1<b<a,\ 0<a<1<b,\ 0<b<a<1$

∴ 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

11. [출제의도] 무한등비급수를 이용하여 문제 해결하기

점 $\mathrm{A_1},\mathrm{A_2},\cdots$ 에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{C_1},\mathrm{C_2},\cdots$라 하면 n이 한없이 커질 때, A_n의 x좌표는 $\overline{\mathrm{OC_1}}+\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\cdots$

$$x=\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$$

12. [출제의도] 미분계수를 이용하여 접선의 기울기 이해하기

점B에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-6$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\mathrm{k}\,(k>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=3\mathrm{k}$

직선 BC의 기울기는 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{-k}=-6$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=6\mathrm{k}$

또, 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{6k}{3k}=2$

따라서, $f'(a)=-3a^2+8a-3$에서

$-3a^2+8a-3=2,\ 3a^2-8a+5=0$

∴ 모든 a값들의 곱은 $\dfrac{5}{3}$

13. [출제의도] 미분을 이용하여 그래프 이해하기

$f'(x)=x^3+(a+1)x^2-a$

$\quad=(x+1)(x^2+ax-a)=0$

의 서로 다른 세 실근이 α,β,γ이다.

따라서 $\alpha=-1$이고, $x^2+ax-a=0$의 서로 다른 두 실근이 β,γ

$g(x)=x^2+ax-a$라 하면

$0<\beta<\gamma<3$이므로

$D>0,\ 0<$(대칭축)$<3,\ g(0)>0,\ g(3)>0$이어야 하므로 만족하는 a의 범위는

$\therefore\ -\dfrac{9}{2}<a<-4$

14. [출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 확률 구하는 과정 완성하기

n개의 주사위를 동시에 던질 때, 나올 수 있는 모든 경우의 수는 6^n가지이다.

$X>1$의 여사건의 경우는 $X\leq 1$인 경우로 $X=0$, $X=1$의 두 가지이다.

(ⅰ) $X=0$인 경우

n개의 주사위의 눈이 모두 같아야 되므로 경우의 수는 6가지이다.

(ⅱ) $X=1$인 경우

연속한 두 눈이 나와야 한다. 즉, 1과 2, 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6이 나와야 한다.

그런데 n개의 주사위를 던졌을 때 나오는 눈이 1 또는 2인 것은 2^n가지이고, 이 중에서 모두 1인 것과 2인 것은 제외해야 하므로 (2^n-2)가지이다. 2와 3, 3과 4, 4와 5, 5와 6인 경우도 마찬가지이므로 모든 경우의 수는 $(2^n-2)\times 5$이다.

따라서, $\mathrm{P}(X\leq 1)=\dfrac{6+(2^n-2)\times 5}{6^n}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(X>1)=1-\mathrm{P}(X\leq 1)$

$\quad=1-\dfrac{5}{3^n}+\dfrac{4}{6^n}$

15. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이해하기

X는 정수 부분이 두 자리인 양의 정수이고 상용로그의 가수가 x이므로

$\log X=1+x\ (0\leq x<1)$

Y는 정수 부분이 세 자리인 양의 정수이고 상용로그의 가수가 y이므로

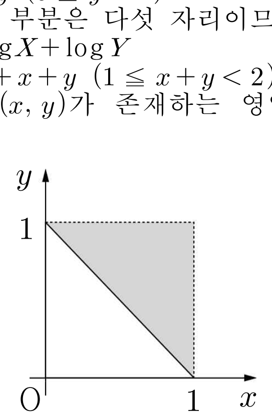
$\log Y=2+y\ (0\leq y<1)$

XY의 정수 부분은 다섯 자리이므로

$\log XY=\log X+\log Y$

$\quad=3+x+y\ (1\leq x+y<2)$

따라서 점 (x,y)가 존재하는 영역은 그림과 같다.



16. [출제의도] 정적분을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$$f_n(x)=\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=(nx-S_n)^2$$

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$라 하면 $f_n(1)-f_n(0)=-n^3$에서 $(n-S_n)^2-S_n^2=-n^3,\quad S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (참)

ㄴ. $n=2$일 때, $f_2(x)=(2x-3)^2$

$f_2(2)=1$ (거짓)

ㄷ. $f_n(x)=\left\{nx-\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$는

$x=\dfrac{n+1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$$\int_0^{n+1}f_n(x)dx=2\int_0^{\frac{n+1}{2}}f_n(x)dx\ (\text{참})$$

17. [출제의도] 합성함수의 불연속점 개수 구하기

$$g(f(x))=\begin{cases}2 & \left(0<x<\frac{1}{2}\right)\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\leq x<\frac{7}{2}\right)\\ 2 & \left(\frac{7}{2}\leq x<\frac{15}{2}\right)\\ 6 & \left(\frac{15}{2}\leq x<\frac{31}{2}\right)\\ 12 & \left(\frac{31}{2}\leq x<20\right)\end{cases}$$

따라서 불연속 점의 개수는 4개이다.

18. [출제의도] 고차부등식의 해 이해하기

$(x-1)(x-3)(x-15)<0$을 만족하는 부등식의 해는 $x<1$ 또는 $3<x<15$

따라서 양의 정수해의 개수는 11 (개)

19. [출제의도] 이항분포에서 평균과 분산 구하기

동전 2개 모두 앞면이 나올 확률이 $\dfrac{1}{4}$이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(100,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

$E(X)=100\times\dfrac{1}{4}=25$

$E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=53$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$\Gamma_A=\dfrac{2}{100},\ \Gamma_B=\dfrac{20}{100}$

$A=20\log\dfrac{1}{|\Gamma_A|}=20\log\dfrac{100}{2}$

$B=20\log\dfrac{1}{|\Gamma_B|}=20\log\dfrac{100}{20}$

$\therefore\ |A-B|=20$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 실제 움직인 거리 구하기

점 P가 출발할 때의 운동방향에 대하여 반대방향으로 움직인 시간은 $t=1$에서부터 $t=3$

$f'(t)=(t-1)(t-3)$

따라서 반대방향으로 실제 움직인 거리

$$d=\int_1^3|f'(t)|\,dt=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ 12d=16$

22. [출제의도] 미분을 이용하여 함수의 성질 이해하기

원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$에 대해

$f(2+x)=f(2-x)$이므로 $x=2$에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 극소이므로 $x=3$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이다.

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$\quad=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$\quad=4x^3-24x^2+44x-24$

따라서 $a=-8,\ b=22,\ c=-24$

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$

$x=2$에서 극대이고

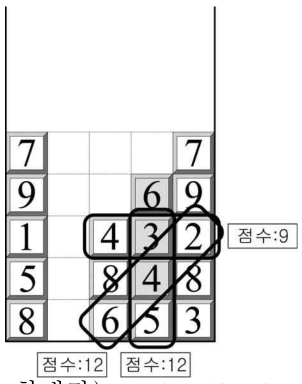
극대값 $a=f(2)=-8$

$\therefore\ a^2=64$

23. [출제의도] 정적분을 이용하여 무한급수의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overline{\mathrm{P_1Q_1}}^3+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}^3+\cdots+\overline{\mathrm{P_nQ_n}}^3\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\int_1^3x^3dx=10$$

24. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기



∴ (득점의 최대값) $=12+12+9=33$

25. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$a+b=100$ …㉠

흘려 내린 물의 양을 M이라 할 때,
B, C, D 물의 양은 차례대로

$M\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)$, $M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2$,

$M\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)$

B, C, D가 등비수열을 이루므로

$$\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)^2\right\}^2=\left\{\left(\frac{a}{100}\right)^2\left(\frac{b}{100}\right)\right\}\left\{\left(\frac{a}{100}\right)\left(\frac{b}{100}\right)\right\}$$

$b^2=100a$ …㉡

㉠, ㉡에 의해

$b=50\sqrt{5}-50$

따라서 $p=50$, $q=50$

∴ $p+q=100$

미분과 적분 정답

26	②	27	④	28	⑤	29	③	30	108

26. [출제의도] 삼각함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{x}}\right\}=-\frac{1}{2}$$

27. [출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각방정식의 근 구하기

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$이므로

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$의 근은

$\frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$이고 근의 개수는 4이다.

28. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 변화율 이해하기

$\mathrm{P}(x,\ x^{\frac{3}{2}})$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=l=\sqrt{x^2+x^3}$

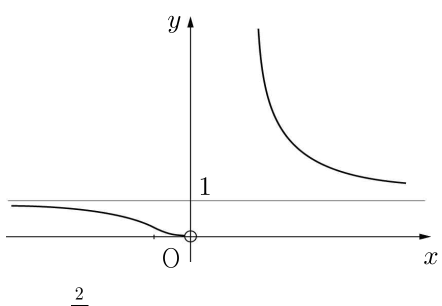
$\frac{dl}{dt}=\frac{1}{2}(x^2+x^3)^{-\frac{1}{2}}(2x+3x^2)\frac{dx}{dt}$

$x=3$일 때, $\frac{dl}{dt}=11$이므로

∴ $\frac{dx}{dt}=4$

29. [출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=e^{\frac{2}{x}}$ 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{x}}=1$ (참)

ㄴ. 극값을 가지지 않는다. (참)

ㄷ. $x>0$에서 $f'(x)<0$ (거짓)

30. [출제의도] 미분을 이용하여 수학외적 문제해결하기

$V(x)=\frac{1}{2}\times\{1+(1+2\sin\theta)\}\times\cos\theta\times8$

$V(x)=8(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)$

$V'(x)=8(1-2\sin^2\theta-\sin\theta)=0$ 에서

$\sin\theta=\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 부피는 최대가 된다.

∴ $V=6\sqrt{3}$, $V^2=108$

확률과 통계 정답

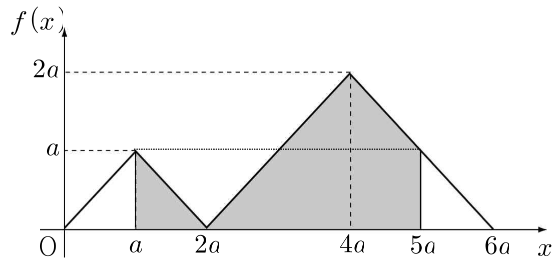
26	①	27	⑤	28	⑤	29	④	30	23

26. [출제의도] 줄기와 잎 그림에서 평균 구하기

중앙값이 44이므로 $x=4$
최빈값이 52이므로 $y=2$
∴ $x+y=6$

27. [출제의도] 확률밀도함수의 성질 이해하기

확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



전체 넓이가 1이므로 $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$P(a\le X\le 5a)=\frac{4}{5}$

28. [출제의도] 이항분포와 정규분포사이의 관계를 이용하여 문제해결하기

신제품의 무게를 확률변수 X라 할 때, 불량률을 구하면

$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le164)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\le\frac{164-180}{8}\right)=0.02$

신제품 중 불량품의 개수를 확률변수 Y라 할 때, $Y\sim\mathrm{B}\left(2500,\ \frac{1}{50}\right)$이고 n이 충분히 크므로

$Y\sim\mathrm{N}(50,\ 7^2)$

$\mathrm{P}(\mathrm{Y}\le64)=\mathrm{P}\left(\mathrm{Z}\le\frac{64-50}{7}\right)=0.98$

29. [출제의도] 확률의 성질을 이용하여 배반사건과 독립사건 이해하기

ㄱ. $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$
$-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)$
$-\mathrm{P}(C\cap A)+\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B\cup C)\ne\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$ (거짓)

ㄴ. $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}))$
$=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{C})$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$이고
$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{C})$이므로
$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}))=\mathrm{P}((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{C}))$
$=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{C})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}))$
$=\mathrm{P}(\mathrm{A})(\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{C})-\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}))$
$=\mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$ (참)

30. [출제의도] 중앙값을 이용하여 확률 계산하기

중앙값이 7이므로 $1,2,3,4,5,6$ 중에서 1장을 뽑고, 7는 반드시 선택하고, $8,9,10$에서 1장을 뽑는 경우이다.

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{{}_6C_1\times{}_3C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{3}{20}$

∴ $p+q=23$

이산수학 정답

26	④	27	⑤	28	③	29	③	30	36

26. [출제의도] 행렬로 나타낸 그래프의 연결상태 이해하기

꼭지점에서 변이 3개, 2개, 2개, 1개 연결된 그래프를 찾는다.

27. [출제의도] 세 항사이의 관계를 이용하여 점화관계 구하기

$a_1=1$, $a_2=2$

$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$

∴ $a_{10}=89$

28. [출제의도] 수에 관한 여러 가지 규칙 이해하기

$165=3\times5\times11$

5의 배수이므로 $c=0,\ 5$

3의 배수이므로

$a+b+c=0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \cdots,\ 27$

11의 배수이므로 $a+b+c=6,\ 17,\ 28$

∴ $a+b+c=6$

29. [출제의도] 여러 가지 그래프의 성질 이해하기

ㄱ. 그래프의 모든 꼭지점의 차수의 합은 그래프의 변의 개수의 2배이다. (참)

ㄴ. 꼭지점이 4개인 완전그래프의 변의 개수는 ${}_4C_2$ (참)

ㄷ. 다섯 개의 꼭지점을 가지는 완전그래프는 평면그래프가 될 수 없다. (거짓)

30. [출제의도] 여러 가지 배열의 수 구하기

서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 뽑는 경우의 수와 같다.

∴ ${}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$