2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

$$\log_8 2\sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$$

답 ④

2.

$X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ …㉠

$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ …㉡

㉠-㉡에서 $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ 2X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

답 ⑤

3.

$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = b$ 에서

$x \to 1$ 일 때 (분모) $\to 0$ 이므로

(분자) $\to 0$ 이어야 한다. 따라서

$\sqrt{2+a} - \sqrt{1+3} = 0$ 이므로 $a = 2$

(준 식)

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{2x+2} - \sqrt{x+3})(\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3})}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+2} + \sqrt{x+3})}$$

$$= \frac{1}{8} = b$$

$\therefore\ ab = 2 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

답 ④

4.

$2\sqrt{x^2 - x - 2} + 2 = x^2 - x$ …㉠

에서 $2\sqrt{x^2 - x - 2} = x^2 - x - 2$

$x^2 - x - 2 = t$ 로 놓으면

$2\sqrt{t} = t$

양변을 제곱하면 $4t = t^2$ $\therefore$ $t = 0, 4$

$x^2 - x - 2 = 0$ 에서 $(x+1)(x-2) = 0$

$\therefore$ $x = -1, 2$

$x^2 - x - 2 = 4$ 에서 $x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$ $\therefore$ $x = -2, 3$

따라서, 방정식㉠의 근은 $x = -2, -1, 2, 3$ 이다.

$\frac{x-5}{x-1} \leq 0$ …㉡

에서 $(x-1)(x-5) \leq 0$, $x \neq 1$

$\therefore$ $1 < x \leq 5$

따라서, 두 식 ㉠,㉡을 동시에 만족하는 실수 x의 값은 $x = 2, 3$ 이므로 구하는 합은

$2 + 3 = 5$

답 ⑤

5.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

로 놓으면 $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = -2$에서

$-1+a-b+c=2,\ c=0,$
$1+a+b+c=-2$
$\therefore\ a=0,\ b=-3,\ c=0$
따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2-3)$$
$$=-3$$

답 ③

<다른풀이>
$g(x)=f(x)+2x$라 하면 $f(-1)=2,\ f(0)=0,$ $f(1)=-2$ 이므로
$g(-1)=g(0)=g(1)=0$
이 때, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$g(x)=f(x)+2x=(x+1)x(x-1)$
$\therefore\ f(x)=x^3-3x$

6.
ㄱ. $\{f(x)\}^2=(4|x|)^2$
$=16x^2$
$f(x^2)=4|x^2|$
$=4x^2$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{16x^2}{4x^2}$$
$$=4$$

ㄴ. $\{f(x)\}^2=(2x^2+2x)^2$
$=4x^2(x+1)^2$
$=4x^4+8x^3+4x^2$
$f(x^2)=2(x^2)^2+2(x^2)$
$=2x^4+2x^2$
$=2x^2(x^2+1)$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{2(x+1)^2}{x^2+1}$$
$$=2$$

ㄷ. $\{f(x)\}^2=\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2$
$=x^2+8+\dfrac{16}{x^2}$
$f(x^2)=x^2+\dfrac{4}{x^2}$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+8+\frac{16}{x^2}}{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+8x^2+16}{x^4+4}$$
$$=4$$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$ 를 만족하는 함수 $f(x)$는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

7.
(i) 모든 실수 x에 대하여 $x^2-x+1>0$이므로

$$\frac{x^2-a^2}{x^2-x+1}<0\ \Leftrightarrow\ x^2-a^2<0$$
$\therefore\ -a<x<a\ \cdots$ ㉠ $(\because\ a>0)$

(ii) $\dfrac{1}{x-2b}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2+2b}{(x-2b)(x+2)}<0$
$\Leftrightarrow\ (2+2b)(x-2b)(x+2)<0\ \cdots$ ㉡
이 때, 이차방정식 ㉡의 해가 ㉠과 같아야 하므로
$2+2b>0$이고 $-2<x<2b$
이어야 한다.
$\therefore\ -a=-2,\ a=2b$
$\therefore\ a=2$

2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

답 ①

8.

ㄱ. $(g \circ f)(x)=1$이므로 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $(g \circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. (반례) $f(x)=\begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$ 라 하면

$(f \circ f)(x)=0$ 이므로

$(f \circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 $f(x)$는

$x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

9.

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$

이면 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$ (참)

ㄴ. $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{h \to 0} \left\{ \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} \right\}$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$+\dfrac{1}{2}\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+(-h))-f(1)}{-h}$

$=0$ (참)

ㄷ. $f(x)=|x-1|$ 일 때

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{|1+h-1|-|1-h-1|}{2h}$

$=\lim_{h \to 0} \dfrac{|h|-|-h|}{2h}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

10.

직선 $y=m(1 \le m \le 10)$과

포물선 $y=-x^2+5x-\dfrac{3}{4}$ 이 만나려면

$m=-x^2+5x-\dfrac{3}{4}$ 즉,

$x^2-5x+m+\dfrac{3}{4}=0$ 에서 실근 x의 값이 존재해야 한다.

$D=25-4m-3 \ge 0$에서 $m \le \dfrac{11}{2}$

$\therefore m=1,2,3,4,5$

따라서, 주머니에서 5이하의 수가 적힌 구슬을 꺼낼 확률은

$\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

답 ④

11.

ㄱ. $A^2=A$의 양변에 A를 곱하면

$A^3=A^2=A$ (참)

ㄴ. $B^2=(-A)^2=A^2=A=-B$ (참)

ㄷ. $A^2 = A$에서 $A^2 - A = O$이므로

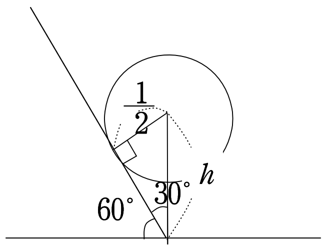
$$(A+3E)(A-4E) = -12E$$

$$\therefore\ (A+3E)^{-1} = -\frac{1}{12}(A-4E)$$

따라서 $A+3E$는 역행렬을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12.
공이 빗면과 충돌할 때의 공의 중심과 바닥 사이의 거리를 h_0라 하면 아래 그림에서



$h_0 \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\therefore\ h_0 = 1$

구와 빗면이 만나는 시각을 t라 하면 $h(t) = 1$에서

$21 - 5t^2 = 1$

$\therefore\ t = 2\ (\because\ t > 0)$

따라서 t초 후의 공의 중심의 속도는 $h'(t) = -10t$이므로 충돌하는 순간의 속도는 $h'(1) = -20$

답 ①

13.
점 A, B는 $y = 8^x$ 위의 점이고 y 좌표가 각각 a, b 이므로

$A(\log_8 a,\ a)$, $B(\log_8 b,\ b)$

따라서 $\triangle AEB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{BE}$$

$$= \frac{1}{2} \times (a-b) \times (\log_8 a - \log_8 b)$$

$$= 20$$

즉

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (a-b) \times (\log_2 a - \log_2 b) = 20$$

$$\frac{1}{2} \times (a-b) \times (\log_2 a - \log_2 b) = 60 \text{ - - - ㉠}$$

한편 점 C, D는 $y = 4^x$ 위의 점이고 y 좌표 가 각각 a, b 이므로

$C(\log_4 a,\ a)$, $D(\log_4 b,\ b)$

따라서 $\triangle CDF$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{DF} \times \overline{FC}$$

$$= \frac{1}{2} \times (a-b) \times (\log_4 a - \log_4 b)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (a-b) \times (\log_2 a - \log_2 b)$$

$$= \frac{1}{2} \times 60\ (\because\ ㉠)$$

$$= 30$$

답 ③

14.
$n = k$일 때, $a_k < \frac{2}{k+1}$ 이라고 가정하면

$n = k+1$ 일 때,

$$a_{k+1} = \frac{1! + 2! + 3! + \cdots + (k+1)!}{(k+2)!}$$

2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

$$=\frac{1}{k+2}\cdot\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{k+2}\left\{1+\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!}{(k+1)!}\right\}$$

$$=\boxed{\frac{1}{k+2}}\,(1+a_k)$$

$$<\frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\boxed{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}$$

이다.

자연수 k에 대하여 $\frac{2}{k+1}\leq 1$ 이므로

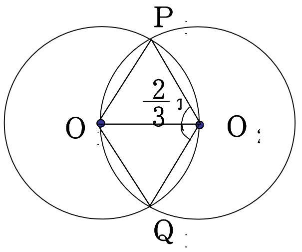
$$\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{k+2}\leq\frac{1}{k+2}$$

이고, $a_{k+1}<\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}=\frac{2}{k+2}$ 이다.

답 ②

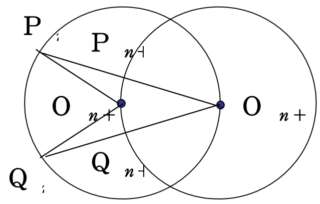
15.

아래 그림에서 $\triangle O_1O_2P_1$, $\triangle O_1Q_1O_2$는 정삼각형이므로 $\angle P_1O_2Q_1=\frac{2}{3}\pi$



또, 아래 그림에서 중심이 O_n인 원에서 호 P_nQ_n에 대한 중심각은 $\angle P_nO_{n+1}Q_n$, 원주각은 $\angle P_{n+1}O_{n+2}Q_{n+1}$이므로

$$\angle P_{n+1}O_{n+2}Q_{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\angle P_nO_{n+1}Q_n$$



$$\therefore\ \angle P_nO_{n+1}Q_n=\frac{2}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서,

$$S_n=\frac{1}{2}\times 1^2\times\left\{\frac{2}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\pi$$

답 ②

16.

$p_1=p-1$

$p_2=p_1-2=p-(1+2)$

$p_3=p_2-3=p-(1+2+3)$

……

$p_n=p-(1+2+3+\cdots+n)$

$\therefore\ p_n=p-\frac{n(n+1)}{2}$

$2p_n=2p-n(n+1)=n+1$

$\therefore\ p=\dfrac{(n+1)^2}{2}$

답 ②

17.
[그림1]의 점 B를 수직선의 원점으로 생각하고 삼각형 ABC가 회전하면서 수직선 위를 움직인다고 생각하자.
변 BC가 수직선 위에 놓이는 순간의 점 B의 좌표를 차례로 나열하면

3, 6, 9, 12, ⋯

그런데, 정사각형의 둘레의 길이는 8이므로 정삼각형이 정사각형의 둘레를 $3n-2$ 바퀴 도는 동안 수직선 위를 움직인 거리는

$$8(3n-2)=24n-16$$

이 때, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수는 수직선 위의 $0<x<24n-16$인 범위에서 x좌표가 3의 배수인 점의 개수와 같다.

$$\therefore\ a_{3n-2}=\left[\frac{24n-16}{3}\right]=8n-6$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n-6}{n}=8$$

답 ①

18.

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{h^3+6h^2+14h}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}(h^2+6h+14)$$

$$=14$$

답 14

19.
주어진 조건에서

$\dfrac{450}{a}=\dfrac{b}{100}$이고, $\dfrac{450}{a+150}=\dfrac{b-50}{100}$이므로

$$\frac{450}{a+150}=\frac{450}{a}-\frac{50}{100}$$

$$\therefore\ \frac{450}{a+150}-\frac{450}{a}+\frac{1}{2}=0$$

양변에 $2a(a+150)$을 곱하여 정리하면

$$\frac{900a-900(a+150)+a(a+150)}{2a(a+150)}=0$$

$$\therefore\ \frac{a^2+150a-900\cdot150}{2a(a+150)}$$

$$=\frac{(a+450)(a-300)}{2a(a+150)}=0$$

$$\therefore\ a=300\ (\because\ a>0)$$

답 300

20.
접점의 좌표를 $(b, 3b^3)$이라 하면
$y'=9x^2$ 이므로 접선의 방정식은

$y-3b^3=9b^2(x-b)$, $y=9b^2x-6b^3\cdots$㉠

(i) ㉠이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$9b^2a-6b^3=0$, $3a-2b=0$

$\therefore\ b=\dfrac{3}{2}a$

따라서, 접선의 방정식은

$y=\dfrac{81}{4}a^2x-\dfrac{81}{4}a^3\cdots$㉡

(ii) ㉠이 점 $(0, a)$를 지날 때,

$a=-6b^3$

$\therefore\ b=\left(-\frac{a}{6}\right)^{\frac{1}{3}}$

따라서, 접선의 방정식은

$y=9\left(-\frac{a}{6}\right)^{\frac{2}{3}}x+a\cdots$ ㉢

이 때, ㉡, ㉢이 서로 평행하므로

$\frac{81}{4}a^2=9\left(-\frac{a}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{9}{4}a^2\right)^3=\left(-\frac{a}{6}\right)^2$

$\frac{9^3}{4^3}a^6=\frac{1}{6^2}a^2$, $a^4=\frac{2^4}{3^8}$

$\therefore\ a=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$

$\therefore\ 90a=20$

답 20

21.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ 에서

$f(-x)=f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 우함수이다.

$\therefore\ a=c=0$

따라서 $f(x)=x^4+bx^2+6$ 이고

$f'(x)=4x^3+2bx=2x(2x^2+b)$

이 때 $f'(x)=0$ 인 x 의 값을 구하면

$b>0$ 일 때 $x=0$

$b<0$ 일 때 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2}}$

그런데 $b>0$ 일 때 $x=0$ 인 경우

함수 $f(x)$ 는 x=0에서 극소값을 갖고

$f(0)=6$ 이므로 (나)의 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $b<0$ 이고 이 때 함수 $f(x)$ 는

$x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2}}$ 에서 극소값을 가지므로

$f\left(\pm\sqrt{\frac{-b}{2}}\right)=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+6=-10$

$\frac{b^2}{4}=16$, $b^2=64$

그런데 $b<0$ 이므로 $b=-8$

따라서 $f(x)=x^4-8x^2+6$ 이므로

$f(3)=3^4-8\times3^2+6=15$

답 15

22.

점 P의 좌표를 $(x, -x^2+5x)$라 하면

두 정사각형 OABC, PQRS가 겹칠 때,

$0\le x\le 5$ 이다.

두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$

이다.

$S'(x)=-3x^2+10x=-3x\left(x-\frac{10}{3}\right)$ 이므로

$S'(x)=0$ 에서 $x=0, \frac{10}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$S'(x)$		+	0	−	
$S(x)$		↗		↘	

증감표에서 $S(x)$ 는 $x=\frac{10}{3}$ 일 때, 최대값을 갖고 최대값은

$$S\left(\frac{10}{3}\right)=-\frac{1000}{27}+5\cdot\frac{100}{9}=\frac{500}{27}$$

$\therefore\ p+q=27+500=527$

답 527

23.

(i) $X=4$일 때

1회	2회	3회	4회	5회
○	●	●	○	
●	○	●	○	
●	●	○	○	

$\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{10}$

(ii) $X=5$일 때,

1회	2회	3회	4회	5회
○	●	●	●	○
●	○	●	●	○
●	●	○	●	○
●	●	●	○	○

$\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$

$+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X>3)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\frac{7}{10}$

이므로

$p+q=10+7=17$

답 17

24.

조건 (나)에서

$b-a=2^3=8\cdots$㉠

조건 (다)에서

$c-b=2^2=4\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $c-a=12\cdots$㉢

㉠에서 $b=a+8$, ㉢에서 $c=a+12$ 이고

조건 (가)에 의하여

$9\le b\le 13$, $13\le c\le 17$

따라서, k의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하면

$M=5+13+17=35$, $m=1+9+13=23$

$\therefore\ M+m=58$

답 58

25.

운전석에 앉는 경우의 수는 2가지이고

가운데 줄에 영희와 철수가 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2$

나머지 사람들이 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!$ 이므로 구하는 모든 경우의 수는

$2\times{}_3P_2\times 3!=2\times3\times2\times3\times2\times1=72$

답 72

2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

미분과 적분

26.

$$\lim_{x\to0}\frac{(a+12)^x-a^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(a+12)^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$$

$$=\ln(a+12)-\ln a$$

$$=\ln\frac{a+12}{a}=\ln 3$$

$\frac{a+12}{a}=3$, $a+12=3a$

$\therefore\ a=6$

답 ⑤

27.

호 AC의 중심각의 크기는 2θ이므로

$$l_1=1\cdot2\theta=2\theta$$

직각삼각형 ABC에서 ,

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\cos\theta$이므로 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta$$

$=2\sin\theta\cos\theta$

또, 삼각형 ABC내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 넓이 S는

$$S=r\times\frac{2+2\sin\theta+2\cos\theta}{2}$$

$$=r(1+\sin\theta+\cos\theta)$$

$\therefore$ $2\sin\theta\cos\theta$

$=r(1+\sin\theta+\cos\theta)$

$$\therefore\ r=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

따라서 사각형 ODBE에서 $\angle\mathrm{DOE}=\pi-\theta$이므로

$$l_2=r(\pi-\theta)$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)}{1+\sin\theta+\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{l_1}{l_2}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\lim_{\theta\to0}\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta(\pi-\theta)}$$

$$=1\cdot\frac{1+0+1}{1\cdot\pi}=\frac{2}{\pi}$$

답 ④

<다른 풀이>

호 AC의 중심각의 크기는 2θ이므로

$$l_1=1\cdot2\theta=2\theta$$

내접원과 선분 AC의 접점을 F라 하면

$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{AB}}=2$이고,

$\overline{\mathrm{CE}}+\overline{\mathrm{DF}}=r+r=2r$므로

$$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=2+2r\ \cdots\ ㉠$$

그런데, 직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\cos\theta$이므로

$\overline{AC}+\overline{BC}=2\sin\theta+2\cos\theta$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$$2+2r=2\sin\theta+2\cos\theta$$

$\therefore\ r=\sin\theta+\cos\theta-1$

한편, 사각형 ODBE에서 $\angle DOE=\pi-\theta$ 이므로

$$l_2=r(\pi-\theta)$$

$=(\sin\theta+\cos\theta-1)(\pi-\theta)$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{l_1}{l_2}$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta-1)(\pi-\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)}{\{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1\}(\pi-\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)}$$

$$=\frac{2}{\pi}$$

28.

$g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 이므로 폐구간 $[0,\pi]$ 에서

최소값은 $g(0)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$

최대값은 $g\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$

$\therefore\ -1\le g(x)\le2$

따라서,

$y=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)+2}$ 이므로

최대값 M은 $g(x)=-1$ 일 때

$M=\frac{1}{-1+2}=1$

답 ②

29.

ㄱ. $f(x)=e^{-x}\sin x+g(x)$ 에서

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ 이므로

$x\to0$ 일 때 (분자) $\to0$ 이어야 한다.

따라서

$f(0)=e^{-0}\sin0+g(0)=0$ 이므로

$g(0)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x+g(x)}{x^2}=1$ 이다.

그런데 $x\to\infty$ 일 때 $e^{-x}\sin x\to0$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x+g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=1$$ (참)

ㄷ. ㄱ, ㄴ이 참이므로 $g(x)=x^2+ax$ 라 할 수 있다. 이 때

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\sin x+x^2+ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{-x}\sin x}{x}+x+a\right)$$

$$=1+a=1$$

$\therefore\ a=0$

$\therefore\ g(x)=x^2$

그러므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

그런데 $x \to 0$ 일 때 $\frac{1}{x}$ 의 극한값이 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 극한값은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

30.

$\angle ROQ = \theta$, $\angle POQ = 2\theta$ 이고,

$\overline{OP} = \overline{OR} = \overline{OQ} = 1$ 이므로

삼각형 POQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

삼각형 ROQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

따라서, $\frac{1}{2} \sin 2\theta : \frac{1}{2} \sin \theta = 3 : 2$ 에서

$2 \sin 2\theta = 3 \sin \theta$

$4 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin \theta$

$\sin \theta \neq 0$ 이므로 $4 \cos \theta = 3$

$\therefore \cos \theta = \frac{3}{4}$

$\therefore 16 \cos \theta = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$

답 12

확률과 통계

26.

주어진 누적상대도수의 그래프에서 0이상 50미만까지는 증가하는 비율이 작아지므로 도수는 감소하고, 50이상 100미만까지는 증가하는 비율이 일정하므로 도수는 일정하다.

또, 0이상 50미만까지의 누적상대도수의 비율이 0.5 이므로 0이상 50미만의 도수의 합과 50이상 100미만의 도수의 합이 같으므로 주어진 보기에서 옳은 개형은 ③이다.

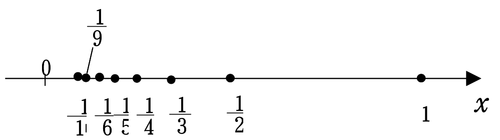
답 ③

27.

$$M_A=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}{2},\quad M_B=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}{2}$$

이므로 $M_A=M_B$

자료 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



자료 A와 자료 B 모두 중앙값을 중심으로 자료의 분포가 오른쪽이 더 넓은 간격으로 분포하고 있으므로 평균이 중앙값보다 크다는 것을 추론할 수 있다.

즉, $M_A < m_A$, $M_B < m_B$

한편, 자료 A가 자료 B보다 중앙값을 중심으로 자료의 분포가 오른쪽이 더 넓은 간격으로 분포하고 있으므로 $m_A > m_B$

를 추론할 수 있다.

$\therefore\ m_A > m_B = M_A = M_B$

답 ②

28.

9개의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_9\mathrm{P}_4=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$$

(i) 백의 자리의 수와 십의 자리의 수가 모두 짝수인 경우의 수는

$${}_4\mathrm{P}_2\times{}_7\mathrm{P}_2=4\cdot 3\cdot 7\cdot 6$$

(ii) 백의 자리의 수와 십의 자리의 수가 모두 홀수인 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_2\times{}_7\mathrm{P}_2=5\cdot 4\cdot 7\cdot 6$$

따라서 백의 자리의 수와 십의 자리의 수의 합이 짝수인 경우의 수는

$$\begin{aligned}&4\cdot 3\cdot 7\cdot 6+5\cdot 4\cdot 7\cdot 6\\&=7\cdot 6\cdot 4(3+5)=7\cdot 6\cdot 4\cdot 8\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7\cdot 6\cdot 4\cdot 8}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=\frac{4}{9}$$

답 ①

29.

가수 C를 선호하는 사건을 D, 가수 A의 팬클럽일 사건을 E라 하면

구하고자 하는 확률은

$$\begin{aligned}P(E|D)&=\frac{P(E\cap D)}{P(D)}\\&=\frac{\frac{150\times 0.7}{350}}{\frac{150\times 0.7+200\times 0.5}{350}}\\&=\frac{105}{205}=\frac{21}{41}\end{aligned}$$

답 ④

30.

(i) ○표인 제비가 3개 이상이 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_3\times{}_4C_1}{{}_8C_4}+\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}=\frac{16+1}{70}=\frac{17}{70}$$

(ii) ×표인 제비가 4개가 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}=\frac{1}{70}$$

따라서, 구하고자 하는 확률은

$$\frac{17}{70}+\frac{1}{70}=\frac{9}{35}$$

$\therefore\ p+q=44$

답 44

이산수학

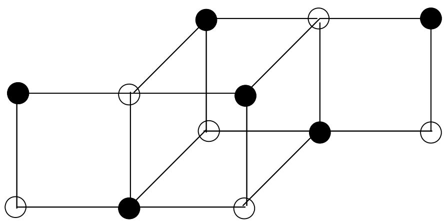
26.
구하는 분할의 개수는 1의 개수에 따라 다음과 나누어 구할 수 있다.

1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 6
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 2+ 4
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 3+ 3
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 2+ 2+ 2
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 5
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 2+ 3
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 4
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 2+ 2
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 3
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 2
1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1+ 1
2+ 2+ 2+ 2+ 2+ 1

$\therefore$ 12(가지)

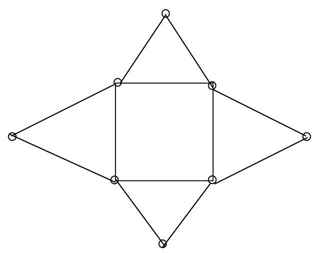
답 ③

27.
주어진 그래프를 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소의 색의 수는 다음 그림과 같이 2가지 이다.



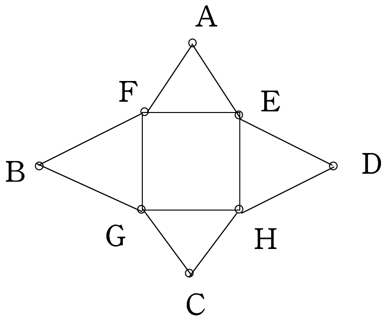
답 ②

28.
ㄱ. 변이 꼭지점에서만 만나도록 오른쪽 그림과 같이 그릴 수 있으므로 평면 그래프이다. <참>



ㄴ. 모든 꼭지점의 차수가 짝수이므로 오일러 회로를 갖는다.<참>

ㄷ. 아래 그림에서 회로 AFBGCHDEA는 모든 꼭지점을 오직 한 번씩만 지나서 시작 점으로 돌아오므로 주어진 그래프는 회밀턴 회로를 갖는다. <참>



답 ⑤

29.

(ⅰ) 자물쇠 A를 열 수 있는 열쇠 2개와 자물쇠 B를 열 수 있는 열쇠 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18\text{(가지)}$$

(ⅱ) 자물쇠 A를 열 수 있는 열쇠 1개와 자물쇠 B를 열 수 있는 열쇠 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12\text{(가지)}$$

따라서, 구하는 경우의 수는

$18 + 12 = 30$(가지)

답 ④

30.

꼭지점이 6개인 완전그래프의 변의

개수는 ${}_6C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$

이 때 6개의 점을 잇는 수형도를 만들려면 5개의 변만 필요하므로 지워야하는 변의 수는 10개이다.

답 10

2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$\log_8 2\sqrt{2} = \log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}$

답 ④

2.

$X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ …㉠

$Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ …㉡

㉠-㉡에서 $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore\ 2X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

답 ⑤

3.

$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1} + 5}{3^n - 1}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 3 + \frac{5}{3^n}}{1 - \frac{1}{3^n}}$

$= 6$

답 ④

4.

방정식 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$가 해를 갖지 않으려면

행렬 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$a \times 1 - (-1) \times (b-1) = 0$

$a + b - 1 = 0$

$\therefore\ a + b = 1$

답 ①

5.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & ab+4 \end{pmatrix}$이므로 $A^2 = A$에서

$1 + ab = -1 \quad \therefore\ ab = -2$

$\therefore\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$=10+2(-2)=6$

답 ①

6.

(i) 진수조건에 의하여

$x-5>0$, $x-6>0$

$\therefore\ x>6 \cdots$ ㉠

(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+\log_{\frac{1}{2}}(x-6)>\log_{\frac{1}{2}}2$

에서

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)(x-6)>\log_{\frac{1}{2}}2$ 이므로

$(x-5)(x-6)<2$, $x^2-11x+28<0$

$(x-4)(x-7)<0$

$\therefore\ 4<x<7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$6<x<7$

$\therefore\ \alpha+\beta=6+7=13$

답 ③

7.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-3}{a_n+1}=\dfrac{3}{4}$ 에서

$\dfrac{2a_n-3}{a_n+1}=b_n$ 이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{3}{4}$

또한 $a_n=\dfrac{3+b_n}{2-b_n}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+b_n}{2-b_n}$

$=\dfrac{3+\frac{3}{4}}{2-\frac{3}{4}}=3$

답 ③

8.

$1\le\log n<3$ 에서 $10\le n<1000$

$\log_2 n$이 정수이려면

$n=2^k$(k는 정수)의 꼴이어야 한다.

$10\le n<1000$ 이므로

$10\le 2^k<1000$ 에서

$k=4,5,6,7,8,9$

따라서, 자연수 n은 $2^4,2^5,2^6,2^7,2^8,2^9$의 6개이다.

답 ④

9.

$2^x=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+k$에서

$(2^x)^2-k\cdot 2^x+1=0$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 위의 방정식의 근이므로

$2^\alpha+2^\beta=k$ ----㉠

한편, 두 점 A, B는 함수 $y=2^x$위의 점이므로 A $(\alpha, 2^\alpha)$, B$(\beta, 2^\beta)$로 놓으면

중점의 좌표가 $\left(0, \dfrac{5}{4}\right)$이므로

$\dfrac{2^\alpha+2^\beta}{2}=\dfrac{5}{4}$ ----㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$k=\dfrac{5}{2}$

2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

답 ⑤

<다른풀이>

두 점 두 점 A, B는 함수 $y=2^x$위의 점이므로 A$(\alpha, 2^{\alpha})$, B$(\beta, 2^{\beta})$로 놓으면 중점의 좌표가 $\left(0, \frac{5}{4}\right)$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ ---㉠, $\frac{2^{\alpha}+2^{\beta}}{2}=\frac{5}{4}$ ---㉡

㉠에서 $\beta=-\alpha$이므로 ㉡에 대입하면

$$\frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}=\frac{5}{4}$$

$$2(2^{\alpha})^2-5\cdot 2^{\alpha}+2=0$$

$$(2\cdot 2^{\alpha}-1)(2^{\alpha}-2)=0$$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$

이 때, A$(1, 2)$, B$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$라 하면 이 두 점은 곡선 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$위의 점이므로

$$2=-\left(\frac{1}{2}\right)^1+k$$

$\therefore\ k=\frac{5}{2}$

10.

ㄱ. $R(16, 4)=\sqrt{16}of4$

$=\sqrt{16}of2^2=\sqrt{8}of2$

$=R(8, 2)$ (참)

ㄴ. $R(a, 5)\cdot R(b, 5)$

$=\sqrt{a}of5\cdot\sqrt{b}of5=a^{\frac{1}{5}}\cdot b^{\frac{1}{5}}$

$=5^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=5^{\frac{a+b}{ab}}$

$R(a+b, 5)=\sqrt{a+b}of5=5^{\frac{1}{a+b}}$

$\therefore\ R(a, 5)\cdot R(b, 5)\neq R(a+b, 5)$ (거짓)

ㄷ. $R(a, b)=\sqrt{a}ofb=b^{\frac{1}{a}}=k$

$\frac{1}{a}=\log_b k=\frac{1}{\log_k b}$

$\therefore\ a=\log_k b$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

11.

ㄱ. $A^2=A$의 양변에 A를 곱하면

$A^3=A^2=A$ (참)

ㄴ. $B^2=(-A)^2=A^2=A=-B$ (참)

ㄷ. $A^2=A$에서 $A^2-A=O$이므로

$(A+3E)(A-4E)=-12E$

$\therefore\ (A+3E)^{-1}=-\frac{1}{12}(A-4E)$

따라서 $A+3E$는 역행렬을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

12.

여학생 수를 x라 하면 전체 학생수는 $2x$ 이므로

남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는

${}_{2x}C_3$

여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우

의 수는

$_{x}C_3$

따라서, $_{2x}C_3 = 10\ _{x}C_3$ 이므로

$$\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{3\cdot2\cdot1} = 10\times\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot2\cdot1}$$

$2(2x-1) = 5(x-2)$ ($\because$ $x\geq3$)

$4x-2 = 5x-10$

$\therefore$ $x = 8$

답 ②

13.

점 A, B는 $y=8^{x}$ 위의 점이고 y 좌표가 각각 $a,\ b$ 이므로

$A(\log_8 a,\ a),\ B(\log_8 b,\ b)$

따라서 $\triangle AEB$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{BE}$

$=\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_8 a-\log_8 b)$

$=20$

즉

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_2 a-\log_2 b)=20$

$\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_2 a-\log_2 b)=60$ ---- ㉠

한편 점 C, D는 $y=4^{x}$ 위의 점이고 y 좌표 가 각각 $a,\ b$ 이므로

$C(\log_4 a,\ a),\ D(\log_4 b,\ b)$

따라서 $\triangle CDF$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{FC}$

$=\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_4 a-\log_4 b)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_2 a-\log_2 b)$

$=\frac{1}{2}\times60$ ($\because$ ㉠)

$=30$

답 ③

14.

$n=k$일 때, $a_k<\frac{2}{k+1}$ 이라고 가정하면

$n=k+1$일 때,

$$a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$$

$$=\frac{1}{k+2}\cdot\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+1)!}$$

$$=\frac{1}{k+2}\left\{1+\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!}{(k+1)!}\right\}$$

$$=\left[\frac{1}{k+2}\right](1+a_k)$$

$$<\frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k+2}+\left[\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right]$$

이다.

자연수 k에 대하여 $\frac{2}{k+1}\leq1$ 이므로

$$\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{k+2}\leq\frac{1}{k+2}$$

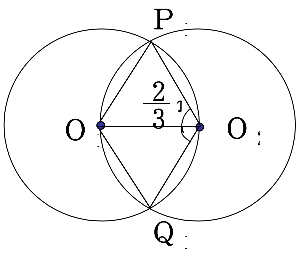
이고, $a_{k+1}<\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+2}=\frac{2}{k+2}$ 이다.

답 ②

15.

아래 그림에서 $\triangle O_1O_2P_1$, $\triangle O_1Q_1O_2$는

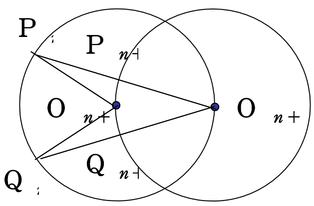
정삼각형이므로 $\angle P_1O_2Q_1 = \frac{2}{3}\pi$



또, 아래 그림에서 중심이 O_n인 원에서 호 P_nQ_n에 대한 중심각은 $\angle P_nO_{n+1}Q_n$, 원주각은 $\angle P_{n+1}O_{n+2}Q_{n+1}$이므로

$\angle P_{n+1}O_{n+2}Q_{n+1}$

$= \frac{1}{2}\angle P_nO_{n+1}Q_n$



∴

$\angle P_nO_{n+1}Q_n = \frac{2}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서,

$$S_n = \frac{1}{2}\times 1^2\times\left\{\frac{2}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

답 ②

16.

$p_1 = p-1$

$p_2 = p_1 - 2 = p-(1+2)$

$p_3 = p_2 - 3 = p-(1+2+3)$

……

$p_n = p-(1+2+3+\cdots+n)$

∴ $p_n = p - \frac{n(n+1)}{2}$

$2p_n = 2p - n(n+1) = n+1$

∴ $p = \frac{(n+1)^2}{2}$

답 ②

17.

[그림1]의 점 B를 수직선의 원점으로 생각하고 삼각형 ABC가 회전하면서 수직선 위를 움직인다고 생각하자.

변 BC가 수직선 위에 놓이는 순간의 점 B의 좌표를 차례로 나열하면

3, 6, 9, 12, ⋯

그런데, 정사각형의 둘레의 길이는 8이므로 정삼각형이 정사각형의 둘레를 $3n-2$ 바퀴 도는 동안 수직선 위를 움직인 거리는

$$8(3n-2) = 24n-16$$

이 때, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수는 수직선 위의 $0<x<24n-16$인 범위에

서 x좌표가 3의 배수인 점의 개수와 같다.

$$\therefore\ a_{3n-2} = \left[\frac{24n-16}{3}\right] = 8n-6$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n-6}{n} = 8$$

답 ①

18.

$a_{47}=\sum_{k=1}^{47} a_k-\sum_{k=1}^{46} a_k$

$=(47^2+47)-(46^2+46)$

$=(47^2-46^2)+(47-46)$

$=(47-46)(47+46)+1$

$=94$

답 94

19.

$A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

에서 $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 이므로

$AB^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 3a \\ 9 & 24 \end{pmatrix}$

$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 2a+15 \\ 9 & a+9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 3a \\ 9 & 24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 2a+15 \\ 9 & a+9 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a=15$

답 15

20.

$(x-1)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r x^r(-1)^{n-r}$ ($r=0,1,2,\cdots,n$)

이고, x항은 $r=1$일 때이므로

x의 계수는

${}_nC_1(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot n$

이다. 따라서, $(-1)^{n-1}\cdot n=-12$에서

$n=12$

답 12

21.

$a_{n+1}-a_n=4n-3$에서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 $\{4n-3\}$이므로

$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(4k-3)$

$=3+4\cdot\frac{9\cdot 10}{2}-3\cdot 9$

$=156$

답 156

22.

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동 시키면

$y=\log_2(x-a)$

의 그래프가 된다. 이 그래프가 함수 $y=\log_b x$의 그래프와 점 $(9,\ 2)$에서 만나므로

$\log_2(9-a)=2$에서

$9-a=2^2$

$\therefore\ a=5$

한편, $\log_b 9=2$에서

$9=b^2$

$b>0$, $b\neq 1$이므로

$b=3$

$\therefore\ 10a+b=10\cdot 5+3$

$=53$

답 53

2008학년도 6월 모의평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

23.

자연수 n에 대하여 $8(n-1) < k \le 8n$인 자연수 k는 원 O_n위에 있다.

따라서 $8\times59 < 475 \le 8\times60$이므로 475는 원 O_{60} 위에 있다.

$\therefore\ m=60$

또, 주어진 그림에서 8, 16, 24, ⋯ 즉, 8×1, 8×2, 8×3, 8×4, ⋯가 놓여 있는 직선을 차례로 나열하면

l_4, l_3, l_2, l_1, l_4,

l_3, l_2, l_1, l_4, ⋯

그런데, $475=8\times59+3$에서 $59=4\times14+3$이므로 $472=8\times59$는 직선 l_2 위에 있다.

따라서 473, 474, 475는 차례로 직선 l_2, l_3, l_4 위에 있다.

$\therefore\ n=4$

$\therefore\ m+n=64$

답 64

24.

조건 (나)에서

$b-a=2^3=8$ ⋯㉠

조건 (다)에서

$c-b=2^2=4$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 $c-a=12$ ⋯㉢

㉠에서 $b=a+8$, ㉢에서 $c=a+12$ 이고 조건 (가)에 의하여

$9\le b\le13$, $13\le c\le17$

따라서, k의 최대값을 M, 최소값을 m이라 하면

$M=5+13+17=35$, $m=1+9+13=23$

$\therefore\ M+m=58$

답 58

25.

운전석에 앉는 경우의 수는 2가지이고

가운데 줄에 영희와 철수가 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2$

나머지 사람들이 세 자리에 앉는 경우의 수는 $3!$ 이므로 구하는 모든 경우의 수는

$2\times{}_3P_2\times3!=2\times3\times2\times3\times2\times1=72$

답 72

26.

$5^{\log b}=a^{2\log5}=5^{2\log a}$에서

$\log b=2\log a$ $\therefore\ b=a^2$ ⋯㉠

행렬 $\begin{pmatrix} a & -1 \\ -b & 2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않으므로

$2a-b=0$ 즉, $b=2a$ ⋯㉡

㉠,㉡에서 $a^2=2a$

$a>0$이므로 $a=2$

㉠에서 $b=4$

$\therefore\ ab=2\cdot4=8$

답 ①

27.

ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{a}{5}\right)^2$

$=\left(-\log_5\frac{a}{5}\right)^2$

$=\left(\log_5\frac{5}{a}\right)^2$

$=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$ <참>

ㄴ. $\{f(a+1)-f(a)\}-\{f(a+2)-f(a+1)\}$

$=2f(a+1)-\{f(a)+f(a+2)\}$

$=2\log_5(a+1)-\{\log_5 a+\log_5(a+2)\}$

$=\log_5(a+1)^2-\log_5 a(a+2)$

$=\log_5\frac{(a+1)^2}{a(a+2)}$

$=\log_5\frac{a^2+2a+1}{a^2+2a}$

$=\log_5\left(1+\frac{1}{a^2+2a}\right)$

$>\log_5 1=0$

$\therefore\quad f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$ <참>

ㄷ.

$f(a)<f(b)$에서

$\log_5 a<\log_5 b$

$\therefore\ a<b$

한편, $f(x)=\log_5 x$에서 $f^{-1}(x)=5^x$이고 $f^{-1}(x)$는 증가함수이므로

$f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$ <참>

답 ⑤

28.

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두 40% 씩 하락하였으므로 지불해야 할 금액은

$\frac{3}{5}\cdot a\cdot 16b+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}a\cdot 8b+\cdots+\frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^4 a\cdot b$

$=\frac{3}{5}ab\left\{1\cdot 16+\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{16}{2^2}\right.$

$\left.+\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\frac{16}{2^3}+\left(\frac{3}{2}\right)^4\cdot\frac{16}{2^4}\right\}$

$=\frac{48}{5}ab\left\{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4\right\}$

$=\frac{48}{5}ab\cdot\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}}{1-\frac{3}{4}}$

$=\frac{192}{5}ab\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$

답 ④

29.

$abcde$가 5의 배수이므로

$e=5$

따라서 구하는 자연수의 개수는 c의 값에 따라 다음과 같이 구한다.

(i) $c=1$일 때, $1<d<5$, $a>b>1$을 만족시키는 자연수의 개수는

$3\times{}_6C_2=45$ (개)

(ii) $c=2$일 때, $2<d<5$, $a>b>2$를 만족시키는 자연수의 개수는

$2\times{}_5C_2=20$ (개)

(iii) $c=3$일 때, $3<d<5$, $a>b>3$을 만족시키는 자연수의 개수는

$1\times{}_4C_2=6$ (개)

(iv) $c\geq 4$일 때, 조건을 만족하는 자연수는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 경우의 수는

$45+20+6=71$(개)

답 ③

30.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\begin{aligned} a_1-a_2+a_3-a_4+a_5 &= -d-d+(a_1+4d) \\ &= a_1+2d \\ &= 4+2d=28 \end{aligned}$$

$\therefore\ d=12$

따라서, $a_n=4+(n-1)\times 12=12n-8$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{12n-8}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(12-\frac{8}{n}\right)=12 \end{aligned}$$

답 12