

2007학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	②	5	⑤
6	①	7	⑤	8	⑤	9	③	10	③
11	⑤	12	④	13	④	14	③	15	④
16	①	17	②	18	93	19	22	20	669
21	32	22	13	23	54	24	12	25	240
26	①	27	②	28	③	29	①	30	45

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$2^{2a-b} = 2^{2a} \cdot 2^{-b} = (2^a)^2 (2^b)^{-1} = 3^2 \times \frac{1}{45} = \frac{1}{5}$$

2. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\log_2(\log_2 3) + \log_2(\log_3 4) = \log_2(\log_2 3 \times \log_3 4) = \log_2(\log_2 4) = \log_2 2 = 1$$

3. [출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$X = \begin{pmatrix} 21 \\ 32 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 31 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 31 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은  $8 + (-2) + (-13) + 5 = -2$

4. [출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} - n \right) \left( \sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} + n \right)}{\sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \frac{n}{2} - n^2}{\sqrt{n^2 + \frac{n}{2}} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} + 1} = \frac{1}{4}$$

5. [출제의도] 무한급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$  이 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$   
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  (참)

ㄴ.  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1)$  이 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 1) = 0$   
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$

따라서  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  은 발산한다. (참)

ㄷ.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1)$  이 모두 수렴하므로  
 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 1)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n - 1) + (b_n + 1) \} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

따라서  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  은 수렴한다. (참)

6. [출제의도] 역행렬의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$-A^2 + A = E \text{ 이므로 } (-A)(A - E) = (A - E)(-A) = E$$

$$\therefore (A - E)^{-1} = -A$$

7. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.  $a_1 - a_2 = a_3 - a_4 = -d$  이므로  
 $T_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) = -2d$  (거짓)

ㄴ.  $a_3 - a_2 = a_5 - a_4 = d$  이므로  
 $T_5 = a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) = a_1 + 2d = a_3$  (참)

ㄷ.  $T_2 = -d$ ,  $T_4 = -2d$ ,  $T_6 = -3d$ , ... 이므로  
 수열  $\{ T_{2n} \}$  은 공차가  $-d$  인 등차수열이다. (참)

8. [출제의도] 같은 것을 포함한 순열의 수를 이용한 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

B, A, N, A, N, A를 일렬로 나열하는 방법의 수는  $\frac{6!}{3!2!} = 60$  (가지)

두 개의 N을 하나로 묶어서 일렬로 나열하는 방법의 수는  $\frac{5!}{3!} = 20$  (가지)

따라서 구하는 확률은  $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$  이다.

9. [출제의도] 배반사건과 독립사건의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.  $A_3 = \{3, 6, 9\}$ ,  $A_4 = \{4, 8\}$  이므로  $A_3 \cap A_4 = \emptyset$   
 따라서  $A_3$  과  $A_4$  는 서로 배반사건이다. (참)

ㄴ.  $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $A_4 = \{4, 8\}$  이므로  
 $P(A_4 | A_2) = \frac{P(A_4 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5}$  (거짓)

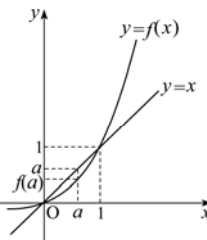
ㄷ.  $A_5 = \{5, 10\}$  이므로  $P(A_2 | A_5) = \frac{1}{2} = P(A_2)$   
 따라서  $A_2$  와  $A_5$  는 서로 독립이다. (참)

10. [출제의도] 지수함수의 그래프와 직선의 기울기를 이용하여 부등식의 대소 관계를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 곡선  $y=f(x)$  과 직선  $y=x$  는 점 (1,1)에서 만나므로 오른쪽 그림에서  $0 < a < 1$  이면  $f(a) < a$  이고,  $a > 1$  이면  $f(a) > a$  이다. (참)

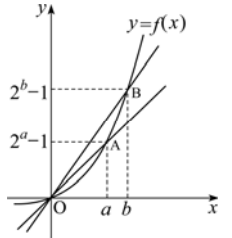
ㄴ. 직선 AB의 기울기는  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a} = \frac{2^b-2^a}{b-a}$  이고  
 기울기가 1보다 큰 경우는  $\frac{2^b-2^a}{b-a} > 1$   
 즉,  $b-a < 2^b-2^a$   
 기울기가 1보다 작은 경우는  $\frac{2^b-2^a}{b-a} < 1$   
 즉,  $b-a > 2^b-2^a$  (거짓)

ㄷ. (직선 OA의 기울기)  $<$  (직선 OB의 기울기) 이므로  
 $\frac{2^a-1}{a} < \frac{2^b-1}{b}$



$$\therefore b(2^a-1) < a(2^b-1) \text{ (참)}$$

11. [출제의도] 상용로그의 지표의 뜻과 주어진 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$$\log 2^{201} = 201 \log 2 = 201 \cdot 0.3010 = 60.5010 \text{ 이므로}$$

$$2^{201} \text{ 은 } 61 \text{ 자리의 자연수이다.}$$

따라서  $1 \leq k \leq 60$  인 모든 자연수 k에 대하여  $2^k$  이 k자리의 수이고,  $2^{k+1}$  이 k+1자리의 수인 자연수 n이 반드시 하나씩 대응한다.  
 따라서  $a_{n+1} > a_n$  을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이므로  $b_n = 1$  을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이고, 나머지 n에 대해서는  $b_n = 0$  이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{200} b_k = 60$$

12. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i)  $n=1$  일 때,  
 $a_1 = 2a_3 + a_2 = 2(2a_2 + a_1) + a_2 = 5a_2 + 2a_1 = 12$   
 이므로 성립한다.

(ii)  $n=k$  일 때,  $a_{4k}$  가 12의 배수라고 가정하면  
 $a_{4(k+1)} = 2a_{4k+3} + a_{4k+2}$   
 $= 2(2a_{4k+2} + a_{4k+1}) + a_{4k+2}$   
 $= 5a_{4k+2} + 2a_{4k+1}$   
 $= 5(2a_{4k+1} + a_{4k}) + 2a_{4k+1}$   
 $= 12a_{4k+1} + 5a_{4k}$

따라서  $n=k+1$  일 때,  $a_{4(k+1)}$  은 12의 배수이다.  
 그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여  $a_{4n}$  은 12의 배수이다.  
 따라서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수는 차례로 12, 5, 12, 5이다.  
 $\therefore a+b+c+d=34$

13. [출제의도] 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=351}^{369} 400 C_k \left(\frac{9}{10}\right)^k \left(\frac{1}{10}\right)^{400-k}$  의 값은 확률변수 X가 이항분포  $B\left(400, \frac{9}{10}\right)$  를 따를 때 확률  $P(351 \leq X \leq 369)$  와 같다.  
 $E(X) = 400 \cdot \frac{9}{10} = 360$ ,  $V(X) = 400 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 36$  이고,  
 시행 횟수 400이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포  $N(360, 6^2)$  을 따른다.  
 $P(351 \leq X \leq 369) = P\left(\frac{351-360}{6} \leq Z \leq \frac{369-360}{6}\right)$   
 $= P(-1.5 \leq Z \leq 1.5)$   
 $= 2P(0 \leq Z \leq 1.5)$   
 $= 2 \times 0.4332 = 0.8664$

14. [출제의도] 등차중항과 등비중항을 이용하여 이차함수의 그래프를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루므로  
 $2b = a + c$   
 $\therefore f(1) = a + 2b + c = 2b + 2b = 4b$  (참)

ㄴ. 이차방정식  $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식을 D라 하면  
 $D = (2b)^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 > 0$  ( $\because a \neq c$ )  
 따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$b^2 = ac \text{에서 } \frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$$

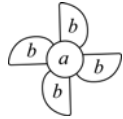
따라서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축에 접한다. (거짓)

15. [출제의도] 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 프로펠러를 칠하는데 사용된 색의 수로 구분한다.

(i) 2가지 색이 사용된 경우

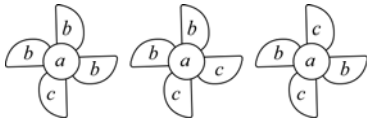
$a, b$ 에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는  ${}_4P_2 = 12$



(ii) 3가지 색이 사용된 경우

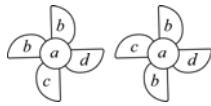
$a, b, c$ 에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는

$${}_4P_3 + {}_4P_3 \times \frac{1}{2} + {}_4P_3 \times \frac{1}{2} = 48$$



(iii) 4가지 색이 모두 사용된 경우

$a, b, c, d$ 에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는  ${}_4P_4 + {}_4P_4 \times \frac{1}{2} = 36$



따라서 구하는 방법의 수는

$$12 + 48 + 36 = 96 \text{ (가지)}$$

16. [출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

케이크의 제 1 단의 부피를  $a$ 라 하고 각 단의 부피가  $r$ 배씩 감소한다고 하면

$$p = ar, q = ar^3 \text{이므로 } \frac{q}{p} = r^2 \therefore r = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

따라서 케이크의 제 8 단의 부피는

$$ar^7 = ar^3 \cdot r^4 = q \left( \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^4 = \frac{q^2}{p^2}$$

17. [출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

집과 학교 사이의 거리가 5km이므로

$$x + y = 5 \dots \textcircled{1}$$

집에서 학교에 갈 때 걸리는 시간은  $\frac{x}{4} + \frac{y}{8}$  (시간)이

고, 학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은  $\frac{y}{4} + \frac{x}{8}$  (시

간)이므로

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{1}{4} = \frac{y}{4} + \frac{x}{8}$$

$$\therefore x - y = -2 \dots \textcircled{2}$$

①, ②을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore p=1, q=-1 \therefore p-q=2$$

18. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} - 4^{n+2}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 5^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - 4^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^n \right\}$$

$$= 25 \cdot \frac{5}{6} - 16 \cdot \frac{2}{3} = 93$$

19. [출제의도] 역행렬의 뜻을 이해하여 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E, (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 \text{ 이고}$$

$$(A + A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = 13E \text{ 이므로}$$

$$A^2 + (A^2)^{-1} = (A + A^{-1})^2 - 2AA^{-1} = 13E - 2E = 11E$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 22이다.

[참고]

주어진 등식을 만족하는 행렬의 예 :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 함수를 추론하고 함수값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f_1(x) = \log_2 x$$

$$f_2(x) = f_1(x^2) + f_1(x) = \log_2 x^2 + \log_2 x$$

$$= 2\log_2 x + \log_2 x = 3\log_2 x$$

$$f_3(x) = f_2(x^2) + f_2(x) = 3\log_2 x^2 + 3\log_2 x$$

$$= 6\log_2 x + 3\log_2 x = 9\log_2 x$$

$$f_4(x) = f_3(x^2) + f_3(x) = 9\log_2 x^2 + 9\log_2 x$$

$$= 18\log_2 x + 9\log_2 x = 27\log_2 x$$

...

이상에서  $f_n(x) = 3^{n-1} \log_2 x$ 임을 알 수 있다.

$$a = f_{2007}(8) = 3^{2006} \log_2 8 = 3^{2007}$$

$$\therefore \log_{27} a = \log_{3^3} 3^{2007} = \frac{2007}{3} = 669$$

21. [출제의도] 이항계수의 성질을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

동주는 알사탕  $k$  ( $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$ )개와 박하사탕  $5-k$ 개를 진서에게 주면 된다. 그런데 동주가 알사탕  $k$ 개를 택하는 방법의 수는  ${}_5C_k$ 이고, 박하사탕  $5-k$ 개를 택하는 방법의 수는 1이므로 구하는 방법의 수는  ${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 = 32$  (가지)

22. [출제의도] 등차수열의 합을 구하는 방법을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)와 (나)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26, a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 134$$

이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 160$$

$$4(a_1 + a_n) = 160 \therefore a_1 + a_n = 40$$

$$\text{한편, } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 260 \text{ 이므로 } \frac{40n}{2} = 260$$

$$\therefore n = 13$$

23. [출제의도] 순서도를 이해하여 인쇄되는 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A, B, C, S$ 의 값을 차례로 구해보면

$$A : 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8$$

$$B : 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13$$

$$C : 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 8 \ 13 \ 21$$

$$S : 1 \ 2 \ 4 \ 7 \ 12 \ 20 \ 33 \ 54$$

따라서 인쇄되는  $S$ 의 값은 54이다.

[참고]

주어진 순서도는 피보나치 수열

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$$

의 합을 구하는 것이다.

24. [출제의도] 주어진 함수의 정의를 이해하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{f(x)-g(x)} = x$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$f(x) - g(x) = \log_2 x \therefore f(x) = \log_2 x + g(x)$$

조건 (가), (나)에 의해

$$f(4) = \log_2 4 + g(4) = 2 + g(4) \therefore f(4) = 2$$

$$f(1000) = \log_2 1000 + g(1000) \text{에서}$$

$$2^9 < 1000 < 2^{10} \text{ 이므로 } f(1000) = 10$$

$$\therefore f(4) + f(1000) = 2 + 10 = 12$$

[참고]

$$g(4) = 0, g(1000) = \log_2 \frac{1024}{1000}$$

25. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 실생활 문제를

해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_{n+1} = a_n \times 0.88 + x \text{ 이므로}$$

$$a_n = a_{n-1} \times 0.88 + x$$

$$= a_{n-2} \times 0.88^2 + (1+0.88)x$$

...

$$= 1200 \times 0.88^n + (1+0.88+0.88^2+\dots+0.88^{n-1})x$$

$$= 1200 \times 0.88^n + \frac{1-0.88^n}{1-0.88}x$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1200 \times 0.88^n + \frac{1-0.88^n}{0.12}x \right) = \frac{x}{0.12}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2000 \text{에서 } \frac{x}{0.12} \leq 2000 \therefore x \leq 240$$

따라서 구하는  $x$ 의 최대값은 240이다.

26. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a, b$ 를 뽑는 방법의 수는  ${}_{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$  (가지)

$5 \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ 가 6의 배수가 되기 위해서는 짝수이면 3의 배수가 되어야 한다.

(i)  $b=0$ 일 때,

$$5+a+0 = 5+a \text{가 3의 배수} \Leftrightarrow a = 1, 4, 7$$

(ii)  $b=2$ 일 때

$$5+a+2 = 7+a \text{가 3의 배수} \Leftrightarrow a = 5, 8$$

(iii)  $b=4$ 일 때

$$5+a+4 = 9+a \text{가 3의 배수} \Leftrightarrow a = 0, 3, 6, 9$$

(iv)  $b=6$ 일 때

$$5+a+6 = 11+a \text{가 3의 배수} \Leftrightarrow a = 1, 4, 7$$

(v)  $b=8$ 일 때

$$5+a+8 = 13+a \text{가 3의 배수} \Leftrightarrow a = 2, 5$$

따라서 6의 배수가 되는 경우의 수는 14(가지)이므로 구하는 확률은  $\frac{14}{90} = \frac{7}{45}$ 이다.

27. [출제의도] 이차함수의 그래프와 확률밀도함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 이차곡선  $f(x) = ax(x-4)$ 는  $x=2$ 에 대하여

$$\text{대칭이므로 } P(0 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2}$$

(참)

ㄴ. 곡선  $y = f(x-2) + b$ 는 곡선

$y = f(x)$ 를  $x$ 축의 방향으로 2

만큼,  $y$ 축의 방향으로  $b$ 만큼

평행 이동한 것이므로

$$P(0 \leq Y \leq 4)$$

$$= 4b + P(0 \leq X \leq 2)$$

$$= 4b + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore b = \frac{1}{8} \text{ (참)}$$

ㄷ.  $P(1 \leq Y \leq 4) = 1 - P(0 \leq Y \leq 1) = \frac{7}{8}$  (거짓)

[참고]

곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축 사이의 넓이와 곡선  $y = g(x)$ 와  $x$ 축 사이의 넓이는 모두 1이다.

$P(\alpha \leq X \leq \beta)$ 는 구간  $\alpha \leq x \leq \beta$ 에서  $y = f(x)$ 와  $x$ 축 사이의 넓이이다.

28. [출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

1991년 말 인구를  $A$ (명), 매년 인구 증가율을  $r$ 라 하면, 15년 동안 2배 증가하였으므로

$$A(1+r)^{15} = 2A \therefore (1+r)^{15} = 2$$

또, 6년 후인 1997년 말 인구는

$A(1+r)^6 = A\{(1+r)^{15}\}^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{2}{5}}A$   
 $x = 2^{\frac{2}{5}}$ 라 하고, 양변에 상용로그를 취하면  
 $\log x = \frac{2}{5} \log 2 = \frac{2}{5} \times 0.30 = 0.12$   
 $\therefore x = 1.32$   
따라서 1997년 말 인구는  $1.32A$ 이므로 1991년 말보다 32% 증가하였다.

29. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_1 = 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 1 + \frac{2}{3},$$

$$a_2 = a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2^2 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2^3 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

...

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

30. [출제의도] 분할과 분배에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

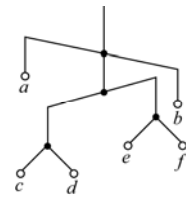
$a$ 와  $b$ 의 위치에 6개의 인형 중 2개를 매다는 방법의 수는

$${}^6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ (가지)}$$

나머지 4개의 인형을 2개씩 두 묶음으로 나누어  $c, d$ 와  $e, f$ 에 매다는 방법의 수는

$${}^4C_2 \times {}^2C_2 \times \frac{1}{2} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{1}{2} = 3 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 모든 경우의 수는  
 $15 \times 3 = 45 \text{ (가지)}$



수리'나'형 정답

1	5	2	2	3	4	4	2	5	1
6	1	7	5	8	4	9	4	10	3
11	5	12	4	13	3	14	3	15	2
16	1	17	2	18	108	19	22	20	250
21	315	22	13	23	54	24	12	25	240
26	1	27	5	28	3	29	5	30	245

해설

1. '가'형과 동일
2. '가'형과 동일
3. '가'형과 동일
4. '가'형과 동일

5. [출제의도] 행렬의 성분의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_{11} = \left[ \frac{3-1}{2} \right] = \left[ \frac{2}{2} \right] = 1, \quad a_{12} = \left[ \frac{3-2}{2} \right] = \left[ \frac{1}{2} \right] = 0,$$

$$a_{21} = \left[ \frac{6-1}{2} \right] = \left[ \frac{5}{2} \right] = 2, \quad a_{22} = \left[ \frac{6-2}{2} \right] = \left[ \frac{4}{2} \right] = 2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서  $A$ 의 모든 성분의 합은 5이다.

6. '가'형과 동일
7. '가'형과 동일

8. [출제의도] 수열의 합을 계산하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=1}^n (2+a_k) = 2n + S_n,$$

$$\sum_{k=1}^n (2k+a_k) = n(n+1) + \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n + S_n \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2+a_k)}{\sum_{k=1}^n (2k+a_k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + S_n}{n^2 + n + S_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{S_n}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{S_n}{n^2}} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{1 + 0 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

9. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_k$ 의 각 자리의 수의 합을  $b_k$ 라 하면

$$a_1 = 2 \quad \therefore b_1 = 2$$

$$a_2 = 10 \cdot 2 + 81 = 101 \quad \therefore b_2 = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$a_3 = 10 \cdot 101 + 81 = 1091 \quad \therefore b_3 = b_2 + 9$$

$$a_4 = 10 \cdot 1091 + 81 = 10991 \quad \therefore b_4 = b_3 + 9 = b_2 + 9 \cdot 2$$

$$a_5 = 10 \cdot 10991 + 81 = 109991 \quad \therefore b_5 = b_4 + 9 = b_2 + 9 \cdot 3$$

...

$$\therefore b_{10} = b_2 + 9 \cdot 8 = 2 + 72 = 74$$

10. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 점  $(2, 0)$ ,  $(0, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은  
 $y = -2x + 4$ 이므로  $b = -2a + 4 \quad \therefore 2a + b = 4$   
 $\therefore (4^a + 2^b)^2 = (4^a - 2^b)^2 + 4 \cdot 4^a \cdot 2^b$   
 $= 6^2 + 4 \cdot 2^{2a+b} = 6^2 + 4 \cdot 2^4 = 100$   
그런데  $4^a + 2^b > 0$ 이므로  $4^a + 2^b = \sqrt{100} = 10$

11. '가'형과 동일

12. '가'형과 동일

13. [출제의도] 상용로그의 가수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$50 = 2 \times 5^2$ 이므로 50의 양의 약수는 1, 2, 5, 10, 25, 50의 6개이다. 이때 3개의 쌍  $(1, 50)$ ,  $(2, 25)$ ,  $(5, 10)$ 에 대하여  
 $\log 1$ 과  $\log 50$ 의 가수는 각각  $\log 1$ ,  $\log 5$ ,  
 $\log 2$ 과  $\log 25$ 의 가수는 각각  $\log 2$ ,  $\log 2.5$ ,  
 $\log 5$ 과  $\log 100$ 의 가수는 각각  $\log 5$ ,  $\log 1$   
이므로 구하는 가수의 합은  
 $(\log 1 + \log 5) + (\log 2 + \log 2.5) + (\log 5 + \log 1) = 3 \log 5$

14. '가'형과 동일

15. [출제의도] 무한등비수열이 수렴할 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 무한수열이 수렴할 조건은  
 $-1 < \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} x \leq 1, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \frac{\pi}{8} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$   
이때  $0 < x < 16$ 일 때,  $0 < \frac{\pi}{8} x < 2\pi$ 이므로 위의 부등식의 해는  
 $0 < \frac{\pi}{8} x \leq \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi \leq \frac{\pi}{8} x < \frac{5}{4}\pi, \quad \frac{7}{4}\pi < \frac{\pi}{8} x < 2\pi$   
따라서 구하는 자연수  $x$ 는 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15의 7개이다.

16. '가'형과 동일

17. '가'형과 동일

18. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을

구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면  
 $\frac{a_6 a_{10}}{a_5} = \frac{ar^5 \times ar^9}{ar^4} = ar^{10} = a_{11} = 36$   
 $\therefore \frac{a_{11}}{a_7} = \frac{ar^{10}}{ar^6} = r^4 = \frac{36}{12} = 3$   
 $\therefore a_{15} = ar^{14} = ar^{10} \times r^4 = 36 \times 3 = 108$

19. '가'형과 동일

20. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4E$$

따라서  $n$ 은 4의 배수이어야 하므로 구하는 자연수  $n$ 의 개수는  $\frac{1000}{4} = 250$ 이다.

21. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 선분의 길이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x$  좌표가  $t$ 인 점에서 선분의 길이를  $f(t)$ 라 하면  
선분의 길이는 두 직선의  $y$ 의 값의 차이므로  
 $f(t) = a(t-1) - t = at - a - t = (a-1)t - a$   
그러므로 주어진 14개의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다. 따라서 구하는 선분의 길이의 합은  
 $\frac{14(3+42)}{2} = 315$

[참고]

일차함수  $f(x) = ax + b$ 에서  $x$ 의 값들이 등차수열을 이루면  $f(x)$ 의 값들도 등차수열을 이룬다.

22. '가'형과 동일

23. '가'형과 동일

24. '가'형과 동일

25. '가'형과 동일

26. [출제의도] 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n}{2^{2n} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 3}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{0-3}{1+0} = -3$$

27. [출제의도] 행렬의 곱셈의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $a, b$ 는 실수)이라 하면  
 $\neg. AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  이므로  
 $AB \in X$  (참)  
 $\neg. BA = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  이므로  
 $AB = BA$   
 $\therefore A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$  (참)  
 $\neg. A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$   
 $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  이므로  
 $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2(a+b) \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2AB$   
 $\therefore (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = 4AB$  (참)

28. [출제의도] 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건과 원의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} a & 3-b \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 에서  $\begin{pmatrix} a-1 & 3-b \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이  $x=0$ ,

$y=0$  이외의 해를 가지려면 행렬  $\begin{pmatrix} a-1 & 3-b \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$$(a-1)^2 - (3-b) = 0$$

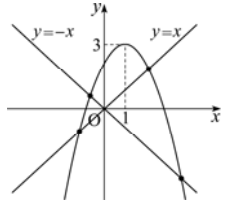
$$\therefore b = -(a-1)^2 + 3$$

따라서 점  $P(a,b)$ 의 자취는 그림과 같이 꼭지점이  $(1,3)$ 이고, 위로 볼록한 포물선이다.

$x$ 축과  $y$ 축에 동시에 접하도록 하는 원의 중심은 두 직선  $y=x$ 와  $y=-x$ 가

곡선  $y=-(x-1)^2+3$ 과 만나는 점이다.

따라서 구하는 원의 개수는 4이다.



29. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_1 = 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 1 + \frac{2}{3},$$

$$a_2 = a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2^2 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2^3 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3,$$

...

$$\therefore a_{20} = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{21} \right\}$$

30. [출제의도] 주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A_8$ 의 마지막 수는

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$$

이므로  $A_9$ 의 처음 수는 205이다.

$A_9$ 의 마지막 수는

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 = 204 + 81 = 285$$

따라서  $A_9$ 의 정중앙에 적힌 수는

$$\frac{205 + 285}{2} = \frac{490}{2} = 245$$