2008 대학수학능력시험 대비
2007학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	②	5	⑤
6	①	7	⑤	8	⑤	9	③	10	③
11	⑤	12	④	13	④	14	③	15	④
16	①	17	②	18	93	19	22	20	669
21	32	22	13	23	54	24	12	25	240
26	①	27	②	28	③	29	①	30	45

해 설

1. **[출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$2^{2a-b}=2^{2a}\cdot 2^{-b}=(2^a)^2(2^b)^{-1}$

$=3^2\times\frac{1}{45}=\frac{1}{5}$

2. **[출제의도] 로그의 성질을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\log_2(\log_2 3)+\log_2(\log_3 4)$

$=\log_2(\log_2 3\times\log_3 4)=\log_2(\log_2 4)$

$=\log_2 2=1$

3. **[출제의도] 역행렬을 이용하여 행렬의 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$X=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-2\\-13&5\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은

$8+(-2)+(-13)+5=-2$

4. **[출제의도] 무리식이 포함된 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n\right)}{\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n}{2}-n^2}{\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1}=\frac{1}{4}$

5. **[출제의도] 무한급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(b_n+1)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 은 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$ 이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-1)+(b_n+1)\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 은 수렴한다. (참)

6. **[출제의도] 역행렬의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$-A^2+A=E$이므로 $(-A)(A-E)=(A-E)(-A)=E$

$\therefore\ (A-E)^{-1}=-A$

7. **[출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $a_1-a_2=a_3-a_4=-d$ 이므로

$T_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)=-2d$ (거짓)

ㄴ. $a_3-a_2=a_5-a_4=d$ 이므로

$T_5=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)=a_1+2d=a_3$ (참)

ㄷ. $T_2=-d$, $T_4=-2d$, $T_6=-3d$, $\cdots$ 이므로

수열 $\{T_{2n}\}$은 공차가 $-d$인 등차수열이다. (참)

8. **[출제의도] 같은 것을 포함한 순열의 수를 이용한 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

B, A, N, A, N, A를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!2!}=60$ (가지)

두 개의 N을 하나로 묶어서 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$ (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$이다.

9. **[출제의도] 배반사건과 독립사건의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. $A_3=\{3,6,9\}$, $A_4=\{4,8\}$이므로 $A_3\cap A_4=\varnothing$

따라서 A_3과 A_4는 서로 배반사건이다. (참)

ㄴ. $A_2=\{2,4,6,8,10\}$, $A_4=\{4,8\}$이므로

$\mathrm{P}(A_4|A_2)=\frac{\mathrm{P}(A_4\cap A_2)}{\mathrm{P}(A_2)}=\frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{2}{5}$ (거짓)

ㄷ. $A_5=\{5,10\}$이므로 $\mathrm{P}(A_2|A_5)=\frac{1}{2}=\mathrm{P}(A_2)$

따라서 A_2와 A_5는 서로 독립이다. (참)

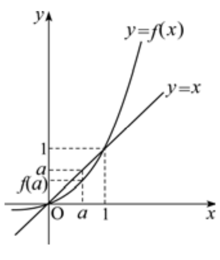
10. **[출제의도] 지수함수의 그래프와 직선의 기울기를 이용하여 부등식의 대소 관계를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 (1,1)에서 만나므로 오른쪽 그림에서

$0<a<1$이면 $f(a)<a$이고,

$a>1$이면 $f(a)>a$이다.

(참)



ㄴ. 직선 AB의 기울기는

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\frac{2^b-2^a}{b-a}$ 이고

기울기가 1보다 큰 경우는 $\frac{2^b-2^a}{b-a}>1$

즉, $b-a<2^b-2^a$

기울기가 1보다 작은 경우는

$\frac{2^b-2^a}{b-a}<1$

즉, $b-a>2^b-2^a$ (거짓)

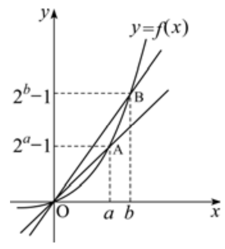
ㄷ. (직선 OA의 기울기)

<(직선 OB의 기울기)이므로

$\frac{2^a-1}{a}<\frac{2^b-1}{b}$

$\therefore\ b(2^a-1)<a(2^b-1)$ (참)

11. **[출제의도] 상용로그의 지표의 뜻과 주어진 수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**



$\log 2^{201}$

$=201\log 2=201\cdot 0.3010=60.5010$ 이므로

2^{201} 은 61자리의 자연수이다.

따라서 $1\leqq k\leqq 60$ 인 모든 자연수 k에 대하여 2^n 이 k자리의 수이고, 2^{n+1} 이 $k+1$자리의 수인 자연수 n 이 반드시 하나씩 대응한다.

따라서 $a_{n+1}>a_n$ 을 만족하는 자연수 n의 개수는 60 이므로 $b_n=1$을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이고, 나머지 n에 대해서는 $b_n=0$이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{200}b_k=60$

12. **[출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(i) $n=1$일 때,

$a_4=2a_3+a_2=2(2a_2+a_1)+a_2=5a_2+2a_1=12$

이므로 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면

$a_{4(k+1)}=2a_{4k+3}+a_{4k+2}$

$=2(2a_{4k+2}+a_{4k+1})+a_{4k+2}$

$=5a_{4k+2}+2a_{4k+1}$

$=5(2a_{4k+1}+a_{4k})+2a_{4k+1}$

$=12a_{4k+1}+5a_{4k}$

따라서 $n=k+1$일 때, $a_{4(k+1)}$은 12의 배수이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수이다.

따라서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수는 차례로 12, 5, 12, 5이다.

$\therefore\ a+b+c+d=34$

13. **[출제의도] 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$\sum_{k=351}^{369}{}_{400}\mathrm{C}_k\left(\frac{9}{10}\right)^k\left(\frac{1}{10}\right)^{400-k}$ 의 값은 확률변수 X가

이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{9}{10}\right)$를 따를 때 확률

$\mathrm{P}(351\leqq X\leqq 369)$와 같다.

$\mathrm{E}(X)=400\cdot\frac{9}{10}=360$, $\mathrm{V}(X)=400\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=36$이고,

시행 횟수 400이 충분히 크므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 6^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(351\leqq X\leqq 369)=\mathrm{P}\left(\frac{351-360}{6}\leqq Z\leqq\frac{369-360}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\leqq Z\leqq 1.5)$

$=2\,\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 1.5)$

$=2\times 0.4332=0.8664$

14. **[출제의도] 등차중항과 등비중항을 이용하여 이차함수의 그래프를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$

$\therefore\ f(1)=a+2b+c=2b+2b=4b$ (참)

ㄴ. 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2b)^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2>0$ ($\because\ a\neq c$)

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$에서 $\frac{D}{4}=b^2-ac=0$

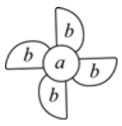
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접한다. (거짓)

15. [출제의도] 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 프로펠러를 칠하는데 사용된 색의 수로 구분한다.

(i) 2가지 색이 사용된 경우

a, b에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$



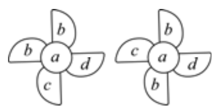
(ii) 3가지 색이 사용된 경우

a, b, c에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는

${}_4\mathrm{P}_3+{}_4\mathrm{P}_3\times\frac{1}{2}+{}_4\mathrm{P}_3\times\frac{1}{2}=48$

(iii) 4가지 색이 모두 사용된 경우

a, b, c, d에 사용될 색을 택하여 칠하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{P}_4+{}_4\mathrm{P}_4\times\frac{1}{2}=36$



따라서 구하는 방법의 수는

$12+48+36=96$ (가지)

16. [출제의도] 등비수열의 일반항과 지수법칙을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

케이크의 제 1 단의 부피를 a라 하고 각 단의 부피가 r배씩 감소한다고 하면

$p=ar$, $q=ar^3$이므로 $\frac{q}{p}=r^2$ $\therefore$ $r=\sqrt{\frac{q}{p}}$

따라서 케이크의 제 8 단의 부피는

$ar^7=ar^3\cdot r^4=q\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^4=\frac{q^3}{p^2}$

17. [출제의도] 연립방정식을 행렬을 이용하여 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

집과 학교 사이의 거리가 5km이므로

$x+y=5$ ⋯ ㉠

집에서 학교에 갈 때 걸리는 시간은 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}$(시간)이고, 학교에서 집으로 올 때 걸리는 시간은 $\frac{y}{4}+\frac{x}{8}$(시간)이므로

$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}+\frac{1}{4}=\frac{y}{4}+\frac{x}{8}$

$\therefore$ $x-y=-2$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

$\therefore$ $p=1$, $q=-1$ $\quad\therefore$ $p-q=2$

18. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{5^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n-4^2\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}$$

$$=25\cdot\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}-16\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=93$$

19. [출제의도] 역행렬의 뜻을 이해하여 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$, $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$이고

$(A+A^{-1})^2=\begin{pmatrix}-1&2\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&0\\0&13\end{pmatrix}=13E$이므로

$A^2+(A^2)^{-1}=(A+A^{-1})^2-2AA^{-1}=13E-2E=11E$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 22이다.

[참고]

주어진 등식을 만족하는 행렬의 예 : $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}$

20. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 함수를 추론하고 함수값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f_1(x)=\log_2 x$

$f_2(x)=f_1(x^2)+f_1(x)=\log_2 x^2+\log_2 x$

$\quad=2\log_2 x+\log_2 x=3\log_2 x$

$f_3(x)=f_2(x^2)+f_2(x)=3\log_2 x^2+3\log_2 x$

$\quad=6\log_2 x+3\log_2 x=3^2\log_2 x$

$f_4(x)=f_3(x^2)+f_3(x)=9\log_2 x^2+9\log_2 x$

$\quad=18\log_2 x+9\log_2 x=3^3\log_2 x$

$\quad\cdots$

이상에서 $f_n(x)=3^{n-1}\log_2 x$임을 알 수 있다.

$a=f_{2007}(8)=3^{2006}\log_2 8=3^{2007}$

$\therefore$ $\log_{27}a=\log_{3^3}3^{2007}=\frac{2007}{3}=669$

21. [출제의도] 이항계수의 성질을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

동주는 알사탕 k($k=0,1,2,3,4,5$)개와 박하사탕 $5-k$개를 진서에게 주면 된다. 그런데 동주가 알사탕 k개를 택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_k$이고, 박하사탕 $5-k$개를 택하는 방법의 수는 1이므로 구하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=2^5=32$(가지)

22. [출제의도] 등차수열의 합을 구하는 방법을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)와 (나)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=26$, $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=160$

$4(a_1+a_n)=160$ $\quad\therefore$ $a_1+a_n=40$

한편, $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=260$이므로 $\frac{40n}{2}=260$

$\therefore$ $n=13$

23. [출제의도] 순서도를 이해하여 인쇄되는 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A, B, C, S의 값을 차례로 구해보면

A :	0	0	1	1	2	3	5	8
B :	1	1	1	2	3	5	8	13
C :	0	1	2	3	5	8	13	21
S :	1	2	4	7	12	20	33	54

따라서 인쇄되는 S의 값은 54이다.

[참고]

주어진 순서도는 피보나치 수열

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

의 합을 구하는 것이다.

24. [출제의도] 주어진 함수의 정의를 이해하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^{f(x)-g(x)}=x$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$f(x)-g(x)=\log_2 x$ $\qquad\therefore$ $f(x)=\log_2 x+g(x)$

조건 (가), (나)에 의해

$f(4)=\log_2 4+g(4)=2+g(4)$ $\qquad\therefore$ $f(4)=2$

$f(1000)=\log_2 1000+g(1000)$에서

$2^9<1000<2^{10}$이므로 $f(1000)=10$

$\therefore$ $f(4)+f(1000)=2+10=12$

[참고]

$g(4)=0$, $g(1000)=\log_2\frac{1024}{1000}$

25. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+1}=a_n\times0.88+x$이므로

$a_n=a_{n-1}\times0.88+x$

$\quad=a_{n-2}\times0.88^2+(1+0.88)x$

$\quad\cdots$

$\quad=1200\times0.88^n+(1+0.88+0.88^2+\cdots+0.88^{n-1})x$

$\quad=1200\times0.88^n+\frac{1-0.88^n}{1-0.88}x$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1200\times0.88^n+\frac{1-0.88^n}{0.12}x\right)=\frac{x}{0.12}$

$\lim_{n\to\infty}a_n\le2000$에서 $\frac{x}{0.12}\le2000$ $\quad\therefore$ $x\le240$

따라서 구하는 x의 최대값은 240이다.

26. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

a, b를 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{P}_2=10\times9=90$ (가지)

$5\boxed{a}\boxed{b}$가 6의 배수가 되기 위해서는 짝수이면서 3의 배수가 되어야 한다.

(i) $b=0$일 때,

$5+a+0=5+a$가 3의 배수 $\Leftrightarrow$ $a=1,4,7$

(ii) $b=2$일 때

$5+a+2=7+a$가 3의 배수 $\Leftrightarrow$ $a=5,8$

(iii) $b=4$일 때

$5+a+4=9+a$가 3의 배수 $\Leftrightarrow$ $a=0,3,6,9$

(iv) $b=6$일 때

$5+a+6=11+a$가 3의 배수 $\Leftrightarrow$ $a=1,4,7$

(v) $b=8$일 때

$5+a+8=13+a$가 3의 배수 $\Leftrightarrow$ $a=2,5$

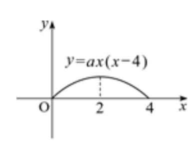
따라서 6의 배수가 되는 경우의 수는 14(가지)이므로 구하는 확률은 $\frac{14}{90}=\frac{7}{45}$ 이다.

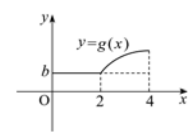
27. [출제의도] 이차함수의 그래프와 확률밀도함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 이차곡선 $f(x)=ax(x-4)$는 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{P}(0\le X\le2)=\mathrm{P}(2\le X\le4)=\frac{1}{2}$

(참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x-2)+b$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행 이동한 것이므로





$\mathrm{P}(0\le Y\le4)$

$=4b+\mathrm{P}(0\le X\le2)$

$=4b+\frac{1}{2}=1$

$\therefore$ $b=\frac{1}{8}$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(1\le Y\le4)=1-\mathrm{P}(0\le Y\le1)=\frac{7}{8}$ (거짓)

[참고]

곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이와 곡선 $y=g(x)$와 x축 사이의 넓이는 모두 1이다.

$\mathrm{P}(\alpha\le X\le\beta)$는 구간 $\alpha\le x\le\beta$에서 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이이다.

28. [출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

1991년 말 인구를 A(명), 매년 인구 증가율을 r이라 하면, 15년 동안 2배 증가하였으므로

$A(1+r)^{15}=2A$ $\quad\therefore$ $(1+r)^{15}=2$

또, 6년 후인 1997년 말 인구는

$A(1+r)^6 = A\{(1+r)^{15}\}^{\frac{2}{5}} = 2^{\frac{2}{5}}A$

$x = 2^{\frac{2}{5}}$ 라 하고, 양변에 상용로그를 취하면

$\log x = \frac{2}{5}\log 2 = \frac{2}{5} \times 0.30 = 0.12$

$\therefore\ x = 1.32$

따라서 1997년 말 인구는 $1.32A$ 이므로 1991 년 말보다 32% 증가하였다.

29. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1 = 1 + \frac{1}{3} \times 2 = 1 + \frac{2}{3}$,

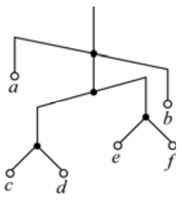
$a_2 = a_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2^2 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2$,

$a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2^3 = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3$,

$\cdots$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ \cdots = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

30. [출제의도] 분할과 분배에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.



a와 b의 위치에 6개의 인형 중 2개를 매다는 방법의 수는

${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\times 5}{2} = 15$ (가지)

나머지 4개의 인형을 2개씩 두 묶음으로 나누어 c, d와 e, f에 매다는 방법의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2} = \frac{4\times 3}{2} \times \frac{1}{2} = 3$ (가지)

따라서 구하는 모든 경우의 수는

$15 \times 3 = 45$ (가지)

수리‘나’형 정답

1	⑤	2	②	3	④	4	②	5	①
6	①	7	⑤	8	④	9	④	10	③
11	⑤	12	④	13	③	14	③	15	②
16	①	17	②	18	108	19	22	20	250
21	315	22	13	23	54	24	12	25	240
26	①	27	⑤	28	③	29	⑤	30	245

해 설

1. ‘가’형과 동일

2. ‘가’형과 동일

3. ‘가’형과 동일

4. ‘가’형과 동일

5. [출제의도] 행렬의 성분의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{11} = \left[\frac{3-1}{2}\right] = \left[\frac{2}{2}\right] = 1,\quad a_{12} = \left[\frac{3-2}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0,$

$a_{21} = \left[\frac{6-1}{2}\right] = \left[\frac{5}{2}\right] = 2,\quad a_{22} = \left[\frac{6-2}{2}\right] = \left[\frac{4}{2}\right] = 2$

$\therefore\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 A의 모든 성분의 합은 5이다.

6. ‘가’형과 동일

7. ‘가’형과 동일

8. [출제의도] 수열의 합을 계산하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k) = 2n + S_n$,

$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k) = n(n+1) + \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n + S_n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+S_n}{n^2+n+S_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{S_n}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{S_n}{n^2}} = \frac{0+\frac{1}{2}}{1+0+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

9. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

a_k의 각 자리의 수의 합을 b_k라 하면

$a_1 = 2$ $\qquad\therefore\ b_1 = 2$

$a_2 = 10 \cdot 2 + 81 = 101$ $\qquad\therefore\ b_2 = 1+0+1 = 2$

$a_3 = 10 \cdot 101 + 81 = 1091$ $\qquad\therefore\ b_3 = b_2 + 9$

$a_4 = 10 \cdot 1091 + 81 = 10991$ $\qquad\therefore\ b_4 = b_3 + 9 = b_2 + 9 \cdot 2$

$a_5 = 10 \cdot 10991 + 81 = 109991$ $\qquad\therefore\ b_5 = b_4 + 9 = b_2 + 9 \cdot 3$

$\cdots$

$\therefore\ b_{10} = b_2 + 9 \cdot 8 = 2 + 72 = 74$

10. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 점 $(2,0)$, $(0,4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y = -2x + 4$ 이므로 $b = -2a + 4 \quad \therefore\ 2a + b = 4$

$\therefore\ (4^a + 2^b)^2 = (4^a - 2^b)^2 + 4 \cdot 4^a 2^b$

$= 6^2 + 4 \cdot 2^{2a+b} = 6^2 + 4 \cdot 2^4 = 100$

그런데 $4^a + 2^b > 0$ 이므로 $4^a + 2^b = \sqrt{100} = 10$

11. ‘가’형과 동일

12. ‘가’형과 동일

13. [출제의도] 상용로그의 가수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$50 = 2 \times 5^2$ 이므로 50 의 양의 약수는 1, 2, 5, 10, 25, 50 의 6 개이다. 이때 3 개의 쌍 (1, 50), (2, 25), (5, 10) 에 대하여

log1 과 log50 의 가수는 각각 log1, log5,

log2 과 log25 의 가수는 각각 log2, log2.5,

log5 과 log100 의 가수는 각각 log5, log1

이므로 구하는 가수의 합은

$(\log 1 + \log 5) + (\log 2 + \log 2.5) + (\log 5 + \log 1) = 3\log 5$

14. ‘가’형과 동일

15. [출제의도] 무한등비수열이 수렴할 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 무한수열이 수렴할 조건은

$-1 < \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x \le 1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\frac{\pi}{8}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0 < x < 16$ 일 때, $0 < \frac{\pi}{8}x < 2\pi$ 이므로 위의 부등식의 해는

$0 < \frac{\pi}{8}x \le \frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi \le \frac{\pi}{8}x < \frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi < \frac{\pi}{8}x < 2\pi$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15 의 7 개이다.

16. ‘가’형과 동일

17. ‘가’형과 동일

18. [출제의도] 등비수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_6 a_{10}}{a_5} = \frac{ar^5 \times ar^9}{ar^4} = ar^{10} = a_{11} = 36$

$\therefore\ \frac{a_{11}}{a_7} = \frac{ar^{10}}{ar^6} = r^4 = \frac{36}{12} = 3$

$\therefore\ a_{15} = ar^{14} = ar^{10} \times r^4 = 36 \times 3 = 108$

19. ‘가’형과 동일

20. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4E$

따라서 n은 4의 배수이어야 하므로 구하는 자연수 n의 개수는 $\frac{1000}{4} = 250$ 이다.

21. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 선분의 길이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x 좌표가 t 인 점에서 선분의 길이를 $f(t)$라 하면 선분의 길이는 두 직선의 y의 값의 차이므로

$f(t) = a(t-1) - t = at - a - t = (a-1)t - a$

그러므로 주어진 14개의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다. 따라서 구하는 선분의 길이의 합은

$\frac{14(3+42)}{2} = 315$

[참고]

일차함수 $f(x) = ax + b$에서 x의 값들이 등차수열을 이루면 $f(x)$의 값들도 등차수열을 이룬다.

22. ‘가’형과 동일

23. ‘가’형과 동일

24. ‘가’형과 동일

25. ‘가’형과 동일

26. [출제의도] 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n - 3\cdot 4^n}{2^{2n} + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n - 3}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{0-3}{1+0} = -3$

27. [출제의도] 행렬의 곱셈의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a, b는 실수)이라 하면

ㄱ. $AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$AB \in X$ (참)

ㄴ. $BA = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$AB = BA$

$\therefore\ A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ (참)

ㄷ. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

$A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2(a+b) \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2AB$

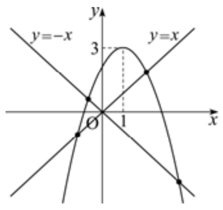
$\therefore\ (A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = 4AB$ (참)

28. [출제의도] 연립방정식의 해가 무수히 많을 조건과 원의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} a & 3-b \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서 $\begin{pmatrix} a-1 & 3-b \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 3-b \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(a-1)^2-(3-b)=0$

$\therefore\ b=-(a-1)^2+3$



따라서 점 $\mathrm{P}(a,b)$의 자취는 그림과 같이 꼭지점이 $(1,3)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
x축과 y축에 동시에 접하도록 하는 원의 중심은 두 직선 $y=x$와 $y=-x$가
곡선 $y=-(x-1)^2+3$과 만나는 점이다.
따라서 구하는 원의 개수는 4이다.

29. [출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1=1+\frac{1}{3}\times 2=1+\frac{2}{3}$,

$a_2=a_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2^2=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$,

$a_3=a_2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\times 2^3=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

$\cdots$

$\therefore\ a_{20}=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ \cdots\ +\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}}{1-\frac{2}{3}}=3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$$

30. [출제의도] 주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A_8의 마지막 수는

$1^2+2^2+3^2+\cdots+8^2=\frac{8\cdot 9\cdot 17}{6}=204$

이므로 A_9의 처음 수는 205이다.

A_9의 마지막 수는

$1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=204+81=285$

따라서 A_9의 정중앙에 적힌 수는

$\frac{205+285}{2}=\frac{490}{2}=245$