수리 영역

"가"형 정답

1	③	2	①	3	②	4	③	5	②
6	①	7	⑤	8	④	9	①	10	④
11	①	12	④	13	④	14	③	15	②
16	②	17	③	18	③	19	②	20	⑤
21	③	22	12	23	10	24	24	25	13
26	36	27	14	28	27	29	7	30	145

해설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산하기

$\log_2 16 - \log_2 \frac{1}{4}$

$= \log_2 2^4 - \log_2 2^{-2}$

$= 4 + 2 = 6$

2. [출제의도] 음수의 제곱근 계산하기

$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{-4}\sqrt{-9}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}i} + \sqrt{4}i\sqrt{9}i$

$= -3i - 6$

$a = -6$, $b = -3$

$\therefore a + b = -9$

3. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식 계산하기

$a^2 b \times \sqrt{3} of \frac{b^2}{a}$

$= a^{2-\frac{1}{3}} b^{1+\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{3}}$

4. [출제의도] 부분집합의 개수 구하기

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에서

$\{1, 3, 5\} \cup X = U$를 만족하는 집합 X는

$\{2, 4\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로

집합 X는 U의 부분집합 중 $\{2, 4\}$를 반드시 포함해야하므로 집합 X의 개수는 $\{1, 3, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore \{1, 3, 5\}$의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)

5. [출제의도] 수학 외적인 상황의 자료에서 표준편차 구하기

해수면의 기압을 a라 하면 각 잠수정이 받는 기압은 $a+4$, $a+5$, $a+6$, $a+7$, $a+8$

(평균)

$= \frac{(a+4)+(a+5)+(a+6)+(a+7)+(a+8)}{5}$

$= a + 6$

기압의 편차들이 -2, -1, 0, 1, 2 이므로

(분산)

$= \frac{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}{5} = 2$

$\therefore$ (표준편차) $= \sqrt{2}$

6. [출제의도] 합성함수의 값 구하기

$f(x) = (x-1)(x+2)$에서

$f(1) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(0) = -2$ 이고,

$f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.

$\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

7. [출제의도] 부정방정식을 이용하여 수학외적 문제 해결하기

관람을 마치고 나온 사람이 3명이므로 이들이 지나올 때 램프는 모두 9회 깜박거렸다.

한 사람이 B전시실 안으로 가기까지 램프가 2회 깜박이고, A전시실 안으로 가기까지는 램프가 1회 깜박이므로 A전시실에 있는 인원을 a명, B전시실에 있는 인원을 b명이라 하면

$a + 2b = 5$

ㄱ. 1명이 문을 지나갈 때마다 램프의 불이 1회 깜박이므로 B전시실의 램프는 3회, 4회, 5회 깜박일 수 있다. (거짓)

ㄴ. $b = 1$ 이면 $a = 3$ (참)

ㄷ. 인원이 최대인 경우는 $b = 0$ 이면 $a = 5$ (참)

8. [출제의도] 역행렬의 정의 이해하기

ㄱ. $A^2 = -E$ 이므로 $A(-A) = E$

$\therefore A^{-1} = -A$ (참)

ㄴ. A의 역행렬이 존재한다면

$A^2 - A = A(A-E) = O$에서

$A^{-1}A(A-E) = A^{-1}O$

$A - E = O$에서 $A = E$는 가정에 모순이므로 A의 역행렬은 존재하지 않는다. (거짓)

반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, $A^2 - A = O$ 이고,

$A \neq E$ 이지만 A의 역행렬이 존재하지 않는다.

ㄷ. $A(2A-E) = E$이므로 역행렬의 정의에 의해 $A^{-1} = 2A - E$

따라서 A^{-1}가 존재하므로

$A^{2006}(A-E) = O$에서

$(A^{-1})^{2006}A^{2006}(A-E) = (A^{-1})^{2006}O$

$A - E = O$

$\therefore A = E$ (참)

9. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 그래프의 개형 구하기

행렬 $\begin{pmatrix} a+b & -2b-2 \\ -a & a+b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 $(a+b)(a+b) + a(-2b-2) = 0$

$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 2a = 0$

$(a-1)^2 + b^2 = 1$

즉, 점 $P(a, b)$는 중심이 $(1, 0)$이고 반지름이 1인 원 위를 움직이는 점이다.

10. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

ㄱ. $\ll a, a \gg = \log_2(\log_a a) = \log_2 1 = 0$ (거짓)

ㄴ.

$\ll b, a \gg = \log_2(\log_b a) = \log_2\left(\frac{1}{\log_a b}\right)$

$= \log_2(\log_a b)^{-1} = -\log_2(\log_a b)$

$= -\ll a, b \gg$ (참)

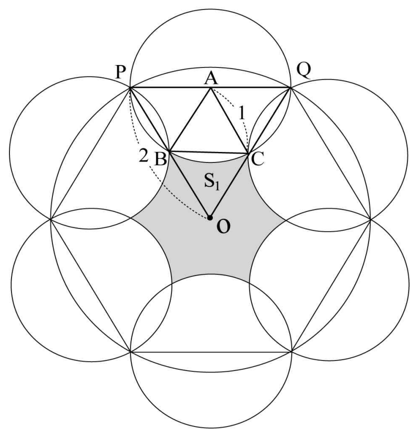
ㄷ. $\ll a, b^2 \gg - \ll a^2, b \gg$

$= \log_2(\log_a b^2) - \log_2(\log_{a^2} b)$

$= \log_2(2\log_a b) - \log_2\left(\frac{1}{2}\log_a b\right)$

$= \log_2\left(\frac{2\log_a b}{\frac{1}{2}\log_a b}\right) = \log_2 4 = 2$

11. [출제의도] 부채꼴의 넓이를 이용하여 도형의 넓이 구하기



$\triangle$OPQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고,

$\triangle$ABC는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$S_1 = \triangle OPQ - (\triangle APB + \text{부채꼴}ABC + \triangle ACQ)$

$= \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

구하고자 하는 부분의 넓이 S는 $6S_1$이므로

$S = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - \pi$

12. [출제의도] 행렬의 성분 구하기

이차방정식 $x^2 + 2mx + n = 0$ 의

판별식 $D/4 = m^2 - n$에서

$m = 1, n = 1$일 때, $D/4 = 0$ $\therefore a_{11} = 0$

$m=1, n=2$일 때, $D/4<0$ $\therefore a_{12}=-1$

$m=2, n=1$일 때, $D/4>0$ $\therefore a_{21}=1$

$m=2, n=2$일 때, $D/4>0$ $\therefore a_{22}=1$

따라서 행렬 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이다.

13. [출제의도] 원에서의 증명문제 완성하기

두 점 $A(p, q)$, $B(r, s)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$p^2+q^2=1$ ……㉠

$r^2+s^2=1$ ……㉡

$\overline{AB}^2=(r-p)^2+(s-q)^2=2\times\boxed{(1-pr-qs)}$

$=2$

에서 $\boxed{1-pr-qs}=1$ ……㉢

㉢을 q에 대하여 정리하여 ㉠식에 대입하면

$p^2+q^2=p^2\left(1+\dfrac{r^2}{s^2}\right)=1$이므로 $\boxed{p^2=s^2}$이 성립

따라서, $p^2+r^2=q^2+s^2=1$ 이므로 두 점 $C(p, r)$, $D(q, s)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있다.

$\overline{CD}^2=(q-p)^2+(s-r)^2=2-2(pq+rs)$

㉢과 $\boxed{p^2=s^2}$에 의하여 $pq+rs=0$이므로

$\overline{CD}=\boxed{\sqrt{2}}$

14. [출제의도] 로그의 성질을 이용한 추론문제 완성하기

$c=a\log_{\sqrt{12}}3+b\log_{144}2$

$=\log_{\sqrt{12}}3^a+\log_{144}2^b$

$=\log_{12}3^{2a}2^{\frac{b}{2}}$ 이므로

$3^{2a}2^{\frac{b}{2}}=(3^c\cdot 2^{2c})$이다.

따라서 $a:b:c=1:8:2$ 이다.

15. [출제의도] 행렬의 성질을 이용하여 계산하기

$2AB+E=O$이므로

$A^{-1}=-2B$, $B^{-1}=-2A$, $AB=-\dfrac{1}{2}E$

이다.

$A^{-1}+B^{-1}=E$에서

$-2A-2B=E$,

$A+B=-\dfrac{1}{2}E$

따라서

$A^2B+AB^2=A(AB)+(AB)B$

$=-\dfrac{1}{2}E(A+B)$

$=\dfrac{1}{4}E$

16. [출제의도] 역함수의 성질 이해하기

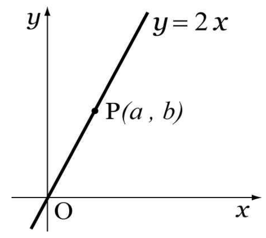
$f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$ 가 직선 $y=x$에 대칭이므로

$f(x)=f^{-1}(x)$, $f^{-1}(x)=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\dfrac{kx}{x+3}=\dfrac{-3x}{x-k}$

$\therefore k=-3$

17. [출제의도] 함수의 그래프 개형 구하기



그림과 같이 점 P가 $y=2x$ 위를 움직이므로

$b=2a$

$y=a+b=3a$ $\therefore$ $a=\dfrac{1}{3}y$

$x=a^2=\left(\dfrac{1}{3}y\right)^2$, $a\geq 0$이므로 $y=3\sqrt{x}$

$\therefore$ 그래프의 개형은 ③번

18. [출제의도] 원과 직선사이의 위치관계를 이용하여 문제해결하기

점 $P(a, b)$는 원 $x^2-4x+y^2=0$ 위를 움직이고, 원의 중심 $C(2, 0)$과 점 $A(-2, 0)$에 대하여

$\triangle ACP$의 넓이를 n이라 하면,

$\triangle ACP=\dfrac{1}{2}\times 4\times|b|=n$ (n은 자연수, $|b|\leq 2$)

$\therefore |b|=\dfrac{n}{2}$

$n=1, 2, 3$일 때, 점 P는 각각 4개씩이고, $n=4$일 때, 점 P는 2개

따라서, 의 넓이가 자연수가 되게하는 점 P의 개수는 총 14(개)

19. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

ㄱ. (반례) $\alpha=2\pi-\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{\pi}{3}$이면,

$\sin\alpha=\cos\beta$이지만 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$ (거짓)

ㄴ. $\sin\alpha=\cos\beta$이므로

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ (참)

ㄷ. (반례) $\alpha=2\pi-\dfrac{\pi}{3}$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{\pi}{3}$이면, $\sin\alpha=\cos\beta$이지만

$\tan\alpha+\tan\beta=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (거짓)

참고 : $\pi<\alpha<2\pi$, $\pi<\beta<2\pi$에 대하여

$\sin\alpha=\cos\beta$인 경우는

$\alpha=\pi+\theta$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi-\theta$ (단 $0<\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$)이고

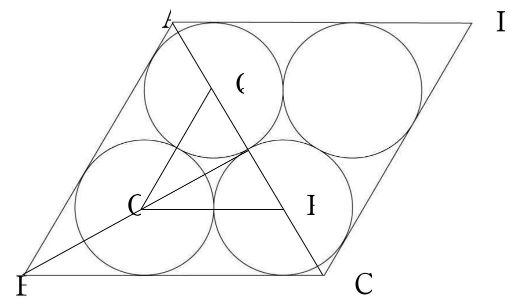
$\alpha=2\pi-\theta$, $\beta=\dfrac{3}{2}\pi-\theta$ (단 $0<\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$)

일 때, 성립한다.

20. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수학외적문제 해결하기

원의 반지름의 길이가 10이므로 정사각형의 한 변의 길이는 40 …㉠

그림과 같이 마름모의 꼭지점을 각각 A, B, C, D 라 하고, 외접하는 세 원의 중심을 O, P, Q라 하자.



$\triangle OPQ$는 한 변의 길이가 20인 정삼각형

와 가 평행이고, 와 가 평행이므로

$\triangle ABC$는 $\triangle OPQ$와 닮은 정삼각형

점 O에서 $\overline{AC}$까지 이르는 거리는 $10\sqrt{3}$

점 B에서 $\overline{AC}$까지 이르는 거리는 $10\sqrt{3}+20$

마름모의 한 변의 길이를 x라 하면,

$x:20=(10\sqrt{3}+20):10\sqrt{3}$

$\therefore x=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}+20$ …㉡

㉠과 ㉡에 의해

$\left(\dfrac{40\sqrt{3}}{3}+20\right)-40=20\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$

21. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

잡음지수를 $\dfrac{1}{10}$배 하였을 때, 잡음인자 $a=10^{\frac{N_F}{100}}$

잡음지수를 $\dfrac{1}{100}$배 하였을 때, 잡음인자 $b=10^{\frac{N_F}{1000}}$

따라서 $b=a^{\frac{1}{10}}$

$\therefore$ $\log_a b=\log_a a^{\frac{1}{10}}=\dfrac{1}{10}$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그값 구하기

$\log_2 9\times\log_{\sqrt{3}}8=\dfrac{\log 9}{\log 2}\times\dfrac{\log 8}{\log\sqrt{3}}$

$=12$

23. [출제의도] 행렬을 이용하여 연립일차방정식의 해 구하기

$\begin{pmatrix}5&0\\9&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x-y\\x+y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5&0\\9&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5-k&k\\9-k&6-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 이고, $x=0,\ y=0$

이외의 해를 갖기 위해서는 행렬 $\begin{pmatrix}5-k&k\\9-k&6-k\end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(5-k)(6-k)-k(9-k)=0$

$k^2-10k+15=0$

따라서, 조건을 만족하는 실수 k값들의 합은 10

24. [출제의도] 지수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$2^{30}\times5^{20}=a\times10^{n}$에서

$a=\frac{2^{30}\times5^{20}}{10^{n}}=\frac{(2^{10}\times2^{20})\times5^{20}}{10^{n}}$

$=\frac{2^{10}\times10^{20}}{10^{n}}=\frac{1.024\times10^{23}}{10^{n}}$

$1\leq a<10$이므로 $n=23,\ a=1.024$

$\therefore n+[a]=23+1=24$

25. [출제의도] 근과 계수와의 관계를 이용하여 이차부등식의 해 구하기

갑은 상수항을 바르게 보았으므로

g_1의 상수항 $b=-24$ ($\because$ 두 근의 곱)

을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로

g_2의 일차항 $a=10$

($\because$ 대칭축의 방정식은 $x=-\frac{a}{2}=-5$)

이 때, $x^2+ax+b<0$에 $a,\ b$를 대입하면

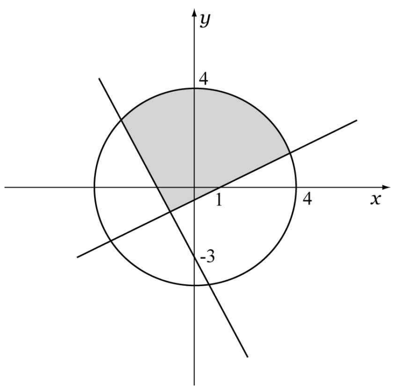
$x^2+10x-24<0$, $(x+12)(x-2)<0$

$\therefore\ -12<x<2$

따라서 만족하는 정수는 13(개)

26. [출제의도] 부등식의 영역에서 최대값, 최소값 구하기

세 부등식이 나타내는 영역은 그림과 같다.



$x+y=k$ (k는 상수)라 하면 k는

두 직선의 교점 $(-1,\ -1)$에서 최소이고,

최소값 $m=-2$이다.

또한 $x+y=k$가 원 $x^2+y^2=16$에 접할 때 최대이므로

$x^2+(-x+k)^2=16$

$2x^2-2kx+k^2-16=0$

$D/4=k^2-2(k^2-16)=0$

$k^2=32$

따라서 최대값 $M=\sqrt{32}$

$\therefore M^2+m^2=36$

27. [출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 행렬의 곱셈 계산하기

$(A^{-1}B)^{-1}=B^{-1}A=\begin{pmatrix}4&11\\-1&-3\end{pmatrix}$

$A^2=AB\times B^{-1}A$

$=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&11\\-1&-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&25\\5&14\end{pmatrix}$

$\therefore d=14$

28. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

$\log A=m+\alpha,\quad \log B=n+\beta$

($m,\ n$ 은 음이 아닌 정수, $0\leq\alpha<1,\ 0\leq\beta<1$)

점 Q가 $y=-x+1$위에 있으므로 $\alpha+\beta=1$

점 P가 $y=\frac{16}{x}$ 위에 있으므로 $mn=16$

$\log AB=\log A+\log B$

$=m+\alpha+n+\beta$

$=m+n+1$

$\therefore AB=10^{m+n+1}$

양의 정수 m,n에 대하여 $mn=16$일 때, $m+n$의 최대값은 17, 최소값은 8이므로

AB의 최대값은 10^{18}, 최소값은 10^{9}

최대값과 최소값의 곱은 10^{27} $\therefore$ $k=27$

29. [출제의도] 상용로그를 이용하여 자리수 구하기

$50\times2^{10}\times2^{10}=32\times x$

$x=50\times2^{15}$

$\log x=\log(50\times2^{15})=6.214$

지표가 6이므로 x는 7자리 정수이다.

30. [출제의도] 방정식을 이용하여 수학외적문제 해결하기

물통 $A,\ B$의 반지름을 각각 $a,\ b$라 하고 높이를 h라 하자.

A에서 물이 모두 빠져 나가는데 걸린 시간을 t라 하면 $\pi a^2h=27t$

$t=\frac{\pi a^2h}{27}$ 이다.

이 때 물통 B에 채워진 물의 부피는

$\frac{3}{4}\pi b^2h=16t=16(\frac{\pi a^2h}{27})$ 이므로

$b^2=\frac{64}{81}a^2$ 이다.

따라서 $a:b=9:8$

$\therefore p^2+q^2=145$