

2006학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

● 2교시 수리탐구 영역 ●

수리'가'형 정답

1	4	2	1	3	3	4	5	5	1
6	4	7	3	8	5	9	5	10	2
11	2	12	1	13	2	14	4	15	3
16	4	17	3	18	19	17	20	12	
21	45	22	20	23	66	24	60	25	35

해설

1. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\log_3 6^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \log_3 2 = \frac{1}{2} (\log_3 6 - \log_3 2) = \frac{1}{2} \log_3 \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$$

2. [출제의도] 역행렬과 행렬의 곱을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 성분들의 합은 1이다.

3. [출제의도] 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다. $x \rightarrow 2$ 이면 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 따라서 $1+a=0$ 에서 $a=-1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2} = b$$

$$\therefore a+b = -\frac{1}{2}$$

4. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f'(1) = 9, g'(1) = 12$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - g(1-h)}{3h} = \frac{2}{3} f'(1) + \frac{1}{3} g'(1) = 10$$

5. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(\text{준식}) = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_3} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_5} + \dots + \sqrt{a_{59}} - \sqrt{a_{61}}}{a_1 - a_3 + a_3 - a_5 + \dots + a_{59} - a_{61}}$$

$$= \frac{1}{10} (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{61}}) = \frac{1}{10} (\sqrt{400} - \sqrt{100}) = 3$$

6. [출제의도] 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\log_2 (\log_2 x) \leq 1, 0 < \log_2 x \leq 3, 1 < x \leq 27$$

따라서 만족하는 자연수 x 의 개수는 26개

7. [출제의도] 평면과 직선 사이의 각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{AB} = \overline{BF} = 1$
 $\overline{AD} = 2$ 이므로
 $\overline{AF} = \sqrt{2}, \overline{BG} = \sqrt{5}$
 $\overline{AC} = \sqrt{5}, \overline{AG} = \sqrt{6}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$

8. [출제의도] 쌍곡선의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하는가를 묻는 문제이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{18} = 1$ 의
 점근선의 방정식은 $y = \pm 3x$ 이다.
 1. $a = -4, b = 0$ 이면 교점 0개
 2. $a = 3, b > 0$ 이면
 점근선과 평행하므로 교점 1개
 3. $a = \frac{1}{3}, b < 0$ 이면 교점이 2개이다.
 따라서 옳은 것은 1, 2, 3이다.

9. [출제의도] 실생활과 관련된 확률 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

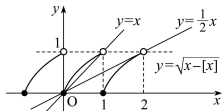
등산화를 산 고객이 250명이므로 운동화를 사고 양말을 받은 고객의 수는 $400 - 250 = 150$ 명이다.
 따라서, 구하는 확률은 $\frac{150}{400} = \frac{3}{8}$

10. [출제의도] 상용로그에서 지표와 가수의 뜻을 이해하는가를 묻는 문제이다.

1. $1 < a < 10$ 에서 $0 < \log a < 1$ 이므로
 $\log 100a = 2 + \log a$
 $\therefore [\log 100a] = 2$ (참)
 2. $[\log x] = 3$ 이므로 $10^3 \leq x < 10^4$
 따라서, 정수 x 의 개수는 $10^4 - 10^3 = 10^3(10-1) = 9 \times 10^3$ (참)
 3. $\log x = n + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)
 $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때, $[\log x^2] = 2n$
 $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ 일 때, $[\log x^2] = 2n + 1$
 $\therefore [\log x^2] = 2n$ 또는 $2n + 1$ (거짓)
 따라서, 옳은 것은 1, 2이다.

11. [출제의도] 방정식의 근의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

방정식의 실근의 개수를 두 함수 $y = \sqrt{x-x}$, $y = ax$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.



$y = ax$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지날 때 $a = 1 \dots \text{㉠}$
 $y = ax$ 가 $y = \sqrt{x-x}$ 과 접할 때는 $ax = \sqrt{x-x}$ ($a > 0$)에서 $a^2 x^2 - x + 1 = 0$ 이 중근을 가지므로 $D = 1 - 4a^2 = 0$ 에서 $a = \frac{1}{2} \dots \text{㉡}$
 ㉠, ㉡에서 구하는 a 의 값의 범위는 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$
 따라서 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$

12. [출제의도] 도형에서 넓이의 변화율에 대한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

t 초 후의 가로, 세로의 길이를 각각 $9 + 0.2t$, $4 + 0.3t$ 로 두면 정사각형의 조건에서 $9 + 0.2t = 4 + 0.3t$ 따라서 $t = 50$
 $S(t) = (9 + 0.2t)(4 + 0.3t) = 0.06t^2 + 3.5t + 36$ 이므로
 $\frac{dS(t)}{dt} = 0.12t + 3.5$ 이고 $t = 50$ 일 때의 넓이의 변화율은 $0.12 \times 50 + 3.5 = 9.5$ ($\text{cm}^2/\text{초}$)이다.

13. [출제의도] 정적분을 적용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(회전체의 부피) $= \pi \int_{-1}^1 (2-x^2) dx - \pi \int_{-1}^1 (x^2) dx$

$$= 2\pi \int_0^1 (2-x^2) dx - 2\pi \int_0^1 (x^2) dx$$

$$= 2\pi \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 - 2\pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{44}{15}\pi$$

14. [출제의도] 순간변화율을 이용하여 극한값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x) = x^3 - 3x$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이므로 구간 $[0, a_n]$ 에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x 좌표를 $x = a_{n+1}$ 이라 하면
 $\frac{a_n^3 - 3a_n}{a_n} = 3a_{n+1}^2 - 3$
 $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} a_n$ ($\because a_n > 0$)이므로 $a_n = a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$
 1. 구간 $(-1, 1)$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 는 감소한다.
 따라서 $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ 를 만족하는 a_n 에 대하여 $f(a_n) < f(a_{n+1})$
 2. $f'(x) = 3x^2 - 3$ 에서 $f'(a_n) = 3a_n^2 - 3$

$$f'(a_{n+1}) = 3a_{n+1}^2 - 3 = a_n^2 - 3$$

$$f'(a_n) - f'(a_{n+1}) = 2a_n^2 > 0$$

$$\therefore f'(a_n) > f'(a_{n+1})$$

$$\text{c. } a_n = a_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = f'(0) = -3$$

그러므로 옳은 것은 1과 2이다.
 15. [출제의도] 삼각형의 넓이에 대한 정리를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 점 Q는 평행사변형 PBTC의 대각선 BC의 중점이므로 $PQ = QT \dots \text{㉠}$
 또, 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AC}$
 이므로 $\overline{PQ} = \overline{AR} \dots \text{㉡}$
 ㉠, ㉡에서 $\overline{AR} = \overline{QT}$

사각형 AQTR는 평행사변형이므로 $\overline{AQ} = \overline{RT}$
 따라서 $\triangle RBT$ 는 $\triangle ABC$ 의 세 중선의 길이를 각각의 길이로 하는 삼각형이다.
 한편, 두 선분 BC와 RT의 교점을 M이라고 하면, $\overline{AQ} \parallel \overline{RT}$ 이고 점 R가 선분 AC의 중점이므로 점 M은 선분 CQ의 중점이다. $\therefore \overline{MB} = \frac{3}{4} \overline{BC}$
 $\angle RMB = \angle AQB$ 이므로
 $\triangle RBT = \frac{1}{2} \times \overline{RT} \times \overline{MB} \times \sin(\angle RMB)$
 $= \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \frac{3}{4} \overline{BC} \times \sin(\angle AQB) = \frac{3}{4} \triangle ABC$

16. [출제의도] 벡터의 내적에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A(4, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 6)에 대하여 점 D, E의 좌표는 각각 D(2, 3, 0), E(0, 2, 4)이다.
 점 P가 선분 DE위를 움직이므로
 $\overline{OP} = \overline{OD} + t\overline{DE} = (2, 3, 0) + t(-2, -1, 4)$
 $= (-2t+2, -t+3, 4t)$ (단, $0 \leq t \leq 1$)
 $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA} = (-2t-2, -t+3, 4t)$ 이므로
 $\overline{OP} \cdot \overline{AP} = (-2t+2)(-2t-2) + (-t+3)(-t+3) + 4t \cdot 4t$
 $= (4t^2 - 4) + (t^2 - 6t + 9) + 16t^2 = 21t^2 - 6t + 5$
 $= 21\left(t - \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{32}{7}$
 따라서 $\overline{OP} \cdot \overline{AP}$ 의 최소값은 $t = \frac{1}{7}$ 일 때 $\frac{32}{7}$ 이다.

17. [출제의도] 정규분포를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

X는 정규분포 N(8, 2^2)을 따르므로 확률 한 발을 쏘아 8점을 득점할 확률은 $P(8 < X \leq 12)$ 이므로
 $P(8 < X \leq 12) = P\left(\frac{8-8}{2} < Z \leq \frac{12-8}{2}\right) = P(0 < Z \leq 2)$
 $= 0.4772$

화살을 쏘았을 때 득점하는 사건은 독립이므로 12발 쏘았을 때, 8점을 득점한 화살의 수 Y의 기대값 $E(Y) = np = 12 \times 0.4772 = 5.7264$

18. [출제의도] 정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(준식) $= \int_0^9 \frac{x^3 + 8}{x+2} dx = \int_0^9 \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} dx$

$$= \int_0^9 (x^2 - 2x + 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_0^9 = 198$$

19. [출제의도] 도형의 성질을 이해하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

12개의 점 중 두 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2 = 66$ (가지)이고, 같은 행 또는 같은 열에 있는 두 점을 선택할 때에만 선분의 길이가 유리수가 되므로 유리수인 선분의 수는 $3 \times {}_4C_2 + 4 \times {}_3C_2 = 30$ 가지이다.
 따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{30}{66} = \frac{6}{11}$. $\therefore a+b = 17$

20. [출제의도] 역행렬과 연립일차방정식의 해와의 관계를 이용하여 최대값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

연립방정식이 $x=y=0$ 이외의 해를 가지므로

$$4a\left(a-\frac{10}{a}\right)+b\left(b-\frac{8}{b}\right)=0$$

$4a^2+b^2-48=0$ 에서 $4a^2+b^2=48$ 이고 a, b 가 양의 실수이므로 $48=4a^2+b^2 \geq 2\sqrt{4a^2b^2}=4ab$ 따라서, ab 의 최대값은 12이다.

21. [출제의도] 평면과 구의 위치 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

구가 평면에 의해 잘린 도형은 원이다.

세 점 $(18, 0, 0), (0, 9, 0), (0, 0, 9)$ 를 지나는 평면의 방정식은 $\frac{x}{18} + \frac{y}{9} + \frac{z}{9} = 1$ 에서 $x+2y+2z=18$

원점에서 이 평면 사이의 거리는 $\frac{|-18|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 6$

이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{9^2-6^2} = \sqrt{81-36} = \sqrt{45}$ 이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 45π 이다.

22. [출제의도] 이산확률분포의 기대값을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\left(\frac{1}{10}-p\right)+\left(\frac{1}{10}+p\right)+\left(\frac{1}{10}-p\right)+\dots+\left(\frac{1}{10}+p\right)=1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{2n}{10}=1 \text{ 따라서 } n=5$$

확률변수 X 의 기대값이 $\frac{23}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= 1\left(\frac{1}{10}-p\right) + 2\left(\frac{1}{10}+p\right) + \dots + 10\left(\frac{1}{10}+p\right) \\ &= \frac{1}{10}(1+2+\dots+10) + (-p+2p-\dots+10p) \\ &= \frac{55}{10} + 5p = \frac{23}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{1}{20}$ 이므로 $\frac{1}{p} = 20$

23. [출제의도] 약수와 배수의 성질을 이용하여 수열에서의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x 보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$ 라고 하면

n 열에 있는 수의 개수는 $\left[\frac{20}{n}\right]$ 이므로

$$\left[\frac{20}{1}\right] + \left[\frac{20}{2}\right] + \left[\frac{20}{3}\right] + \dots + \left[\frac{20}{20}\right] = 20 + 10 + 6 + 5 + \dots + 1 = 66$$

24. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 D 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{AD} \perp \alpha, \overline{DH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

점 H 는 선분 BC 의 중점이므로 $\overline{AH} = \sqrt{10^2-6^2} = 8, \overline{DH} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

$$\therefore \triangle DBC = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$$

25. [출제의도] 확률을 적용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

투입된 공이 A, B, C, D 에 도달할 확률은 각각 $\frac{1}{2^2}$ 이다.

네 곳 모두 켜지려면 한 곳은 세 번, 세 곳은 각각 한 번씩 공이 도달해야 한다. 여섯 개의 공이 A 에 세 개 B, C, D 에 각각 한 개씩 도달하는 경우의 수는 A, A, A, B, C, D 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!}$ 이고 이 중 네 개의 공이 A, B, C, D 에 각각 한 개씩 도달하여 네 번째 공 만에 게임이 끝나는 경우인 4가지가 제외되어야 한다. B, C, D 에 세 개의 공이 도달하는 경우도 마찬가지로

$$\text{이므로 구하는 확률은 } 4\left(\frac{6!}{3!}-4\right) \times \left(\frac{1}{2^2}\right)^6 = \frac{3}{32}$$

[미분과 적분]

26 ④ 27 ① 28 ③ 29 ② 30 20

26. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{1}{2}$$

27. [출제의도] 접선의 기하학적 의미를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \tan\theta$ 는 곡선 $f(x)=2^x-1$ 위의 원점에서 그은 접선의 기울기이다.

$$f'(x) = 2^x \ln 2 \text{ 이므로 } a = f'(0) = 2^0 \ln 2 = \ln 2$$

28. [출제의도] 치환적분법을 이용하여 삼각함수의 적분값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\therefore a_1 + a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (1 + \tan^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$\tan x = t \text{ 일 때, } \sec^2 x = \frac{dt}{dx} \text{ 이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

∴ 마찬가지로 생각하면

$$a_2 + a_4 = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ (참)}$$

$$\text{∴ 일반적으로 } a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4} = (a_{4k+1} + a_{4k+3}) + (a_{4k+2} + a_{4k+4})$$

$$= \int_0^1 t^{4k+1} \, dt + \int_0^1 t^{4k+2} \, dt = \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=0}^{24} (a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4})$$

$$= \sum_{k=0}^{24} \left(\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99} \text{ (거짓)}$$

29. [출제의도] 미분을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사다리꼴의 윗변과 등변이 이루는 각의 크기를 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면

높이는 $2\sin\theta$, 윗변의 길이는 $2 \times 2\cos\theta + 2$ 이므로 사다리꼴의 넓이는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} (4 + 4\cos\theta) \times 2\sin\theta = 4(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

$$S'(\theta) = 4(-\sin\theta)\sin\theta + 4(1 + \cos\theta)\cos\theta = 4(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = 4(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

$$S'(\theta) = 0 \text{에서 } \cos\theta = \frac{1}{2} \text{ 일 때, 극대이면서 최대이다.}$$

따라서 단면의 최대 넓이는 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $3\sqrt{3}$ 이다.

30. [출제의도] 부피와 높이의 변화율에 대한 문제를 정적분을 이용하여 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그릇에 깊이가 h cm가 되도록 물을 넣었을 때 물의 부피 V 는 $V = \int_0^h \pi(\sqrt{9+h^2})^2 \, dh = \int_0^h \pi(9+h^2) \, dh$

$$= \pi\left[9h + \frac{1}{3}h^3\right]_0^h = \pi\left(9h + \frac{1}{3}h^3\right)$$

$$V = \pi\left(9h + \frac{1}{3}h^3\right) \text{ 따라서 } \frac{dV}{dt} = \pi(9+h^2) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 260\pi \text{ 이고 } h=2 \text{ 이므로 } 260\pi = \pi(9+4) \left[\frac{dh}{dt} \right]_{h=2}$$

$$\therefore \left[\frac{dh}{dt} \right]_{h=2} = \frac{260\pi}{13\pi} = 20 \text{ (cm/초)}$$

[확률과 통계]

26 ② 27 ② 28 ⑤ 29 ④ 30 24

26. [출제의도] 가중평균값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{140 \times 300 + 100 \times 260 + 160 \times 350}{400} = 310 \text{ (명/km}^2\text{)}$$

27. [출제의도] 경우의 수를 활용하여 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(1) $i=1, 2, 3, 4, 5$ 일 때, $f(i)=i$ 인 경우 1가지

(2) $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=4, f(5)=5$ 인 경우 조건을 만족하고 이와 같은 경우의 수는 ${}_5C_2=10$ 이므로 10가지

(3) $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=4, f(4)=3, f(5)=5$ 인 경우 조건을 만족하고 이와 같은 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2!} = 15 \text{ 이므로 15가지}$$

따라서 일대일 대응의 개수는 $1+10+15=26$ 개이다.

28. [출제의도] 실생활과 관련된 확률 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

지난 달 한 달 동안 비가 온 날은 $9+3=12$ 일이고 비가 온 12일 중 비가 온다고 예보하여 우산을 가지고 나온 날은 9일이므로 구하는 확률은 $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

29. [출제의도] 구간추정을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

표본비율 $\hat{p} = \frac{80}{400} = 0.2, n=400$ 이므로 모비율 p 에 대한 95% 신뢰구간의 길이는

$$1.96 \times 2 \times \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}} = 0.0784$$

30. [출제의도] 확률분포를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다. 전체 선분의 수는 ${}_8C_2=28$ 이고, 길이가 1인 경우는 12가지, 길이가 $\sqrt{2}$ 인 경우는 12가지, 길이가 $\sqrt{3}$ 인 경우는 4가지이므로 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	계
$14X^2$	14	28	42	
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

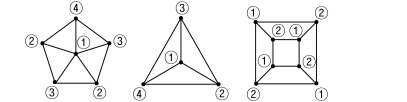
$$\therefore E(14X^2) = 6 + 12 + 6 = 24$$

[이산수학]

26 ④ 27 ⑤ 28 ① 29 ⑤ 30 11

26. [출제의도] 꼭지점을 색칠하는 최소의 색을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그래프를 색칠하는데 필요한 서로 다른 종류의 색깔을 ①, ②, ③, ④로 나타내면



$$\therefore x+y+z = 4+4+2 = 10$$

27. [출제의도] 그래프의 여러 가지 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

∴ 꼭지점의 차수가 홀수인 점이 있으므로 오일러 회로가 존재하지 않는다.

∴ (모든 꼭지점의 차수의 합) = $2 \times$ (변의 개수) = 18

∴ 각 회로에서 변을 하나씩만 제거하면 생성수형도가 되도록 생성수형도의 개수는 ${}_3C_1 \times {}_5C_1 = 15$

28. [출제의도] 수의 규칙성을 추론하여 나머지를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$1^5 + 3^5 + 5^5 + \dots + 19^5$$

$$= (1^5 + 3^5 + 7^5 + 9^5) + (11^5 + 13^5 + 17^5 + 19^5) + (5^5 + 15^5)$$

따라서 $1^5 + 3^5 + 5^5 + \dots + 19^5$ 을 5로 나눈 나머지는 $2(1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5)$ 을 5로 나눈 나머지와 같다.

$$1^5 = 1, 2^5 = 32, 3^5 = 243, 4^5 = 1024$$

$$2(1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5) \text{을 5로 나눈 나머지는 0이므로}$$

$$1^5 + 3^5 + 5^5 + \dots + 19^5 \text{을 5로 나눈 나머지도 0이다.}$$

29. [출제의도] 알고리즘을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

표를 그래프로 나타내면 오른쪽

그림과 같다. 다음과 같은 방법으로 건설비용의 최소값을 찾을 수 있다.

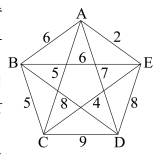
① 먼저 A 를 선택하고 A 와 직접 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. ∴ $A-E$

② A 또는 E 와 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. ∴ $A-E-C$

③ A 또는 C 와 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. 단, 회로가 생기면 안 되므로 $A-C$ 는 제외한다. ∴ $A-E-C-B$

④ A 또는 B 와 연결된 변 중 최소값을 갖는 것을 선택한다. 단, 회로가 생기면 안 되므로 $A-C$ 와 $A-B$ 는 제외한다. ∴ $D-A-E-C-B$

∴ A 와 직접 연결되는 도시는 D, E 이다.



30. [출제의도] 경우의 수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

시험에 사용하지 않은 컴퓨터를 ×라 하고 가능한 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

- (1) A가 앉은 컴퓨터를 비우는 방법의 수
 (×, A, C, B), (×, B, C, A), (×, C, A, B)의 3가지
 (2) 두 번째 비어있는 컴퓨터를 비우는 방법의 수
 (B, ×, C, A), (C, ×, A, B)의 2가지
 (3) B 또는 C가 앉은 컴퓨터를 비우는 방법의 수는 A가 앉은 컴퓨터를 비우는 방법의 수와 같으므로 3×2=6
 (1), (2), (3)에서 모든 방법의 수는 3+2+6=11가지이다.

수리'나'형 정답

1	④	2	①	3	②	4	⑤	5	①
6	④	7	⑤	8	④	9	⑤	10	②
11	④	12	②	13	③	14	④	15	⑤
16	③	17	③	18	27	19	17	20	12
21	920	22	20	23	66	24	105	25	35
26	①	27	②	28	①	29	②	30	32

해설

1. ~ 2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

각 항을 차분수 n 으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n+4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{n}$$

$$2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \text{이다.}$$

4. [출제의도] 여사건의 확률을 이해하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꺼낸 공 2개가 모두 검은 공일 확률이 $\frac{{}^8C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{28}{45}$

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}$

5. ~ 6. '가'형과 동일

7. [출제의도] 지수함수를 이해하여 최소값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x) = 2^{x-1} + 2$ 이므로 $x=1$ 일 때 지수의 최소값이 2이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 최소값은 4이다.

8. [출제의도] 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$ 에서 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로
 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ 이다.

9. ~ 10. '가'형과 동일

11. [출제의도] 행렬의 연산과 역행렬의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A^2 = B^2 \Rightarrow A = B$ 또는 $A = -B$

(반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (거짓)

ㄴ. $E = E - A^2 = (E+A)(E-A)$

$\therefore (E+A)^{-1} = E - A$ (참)

ㄷ. A 의 역행렬이 존재한다면 $A^2 = A$ 의 양변에 A^{-1} 를 곱하면 $A^2 A^{-1} = A A^{-1}$

따라서 $A = E$ 이므로 $A \neq E$ 라는 가정에 모순이다. (참)
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 이항정리를 이용하여 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 의 일반항은 ${}_n C_r x^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_n C_r x^{n-2r}$ 이므로
 $n-2r=2$ ($n=2, 3, 4, 5, 6$)에서
 $n=3, 5$ 일 때, $n-2r=2$ 를 만족하는 정수 r 의 값이 존재하지 않으므로 x^2 항은 존재하지 않는다.
 $n=2, 4, 6$ 일 때, $n-2r=2$ 를 만족하는 r 의 값은 각각 0, 1, 2이므로, x^2 항의 계수는
 ${}_2 C_0 + {}_4 C_1 + {}_6 C_2 = 1 + 4 + 15 = 20$ 이다.

13. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 등비수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x^{10} + x^9 + \dots + x + 1 = (x-1)f(x) + 11$ 이고
 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이다.
 $\therefore 2^{10} + 2^9 + \dots + 2 + 1 = f(2) + 11$
 $\therefore f(2) = \frac{2^{11}-1}{2-1} - 11 = 2^{11} - 12$

14. [출제의도] 수열의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $3^3 = 27$ 이므로 $a_3 = 7$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^5 a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$
 $= 4 + 6 + 6 + 6 + 0 = 22$ (참)

ㄷ. $13^{13} = (10+3)^{13}$ 이므로 13^{13} 의 일의 자리수와 3^{13} 의 일의 자리수는 서로 같고,
 $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \dots$ 이므로
 3^n 의 일의 자리수는 3, 9, 7, 1, 3, ...으로 반복되어 13^{13} 의 일의 자리수는 3이다. 이와 같은 방법으로 23^{23} 의 일의 자리수는 7이다. (거짓)
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=k$ ($k \geq 2$)일 때, $2^{k+1} > k(k+1) + 1$ 이므로

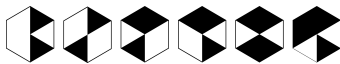
$2 \times 2^{k+1} = 2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$ 이므로, 이 때

$2(k^2 + k + 1) - \{(k+1)(k+2) + 1\}$

$= k^2 - k - 1 = k(k-1) - 1 > 0$

16. [출제의도] 색칠하는 방법의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정육각형에 칠해진 검은색 삼각형의 개수가 2개인 우, 3개인 경우, 4개인 경우는 각각 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 $2+2+2=6$
 <참고> 네 자연수의 합이 6인 숫자의 조합은 (1, 1, 1, 3), (1, 1, 2, 2)이다. 이 수들을 원형으로 배열하는 방법은 아래 그림의 세 가지이다. 그림 3 $\begin{pmatrix} 1 \\ \bigcirc \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} 1 \\ \bigcirc \\ 1 \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} 1 \\ \bigcirc \\ 1 \end{pmatrix}$
 에 나열된 수와 같은 정삼각형의 개수에 흰 색 또는 검은 색을 번갈아 칠하면 정육각형을 네 부분으로 구분하는 한 가지 방법과 대응되므로 6가지이다.

17. '가'형과 동일

18. [출제의도] 거듭제곱의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{\frac{3^{14} + 3^{10}}{3^8 + 3^4}} = \sqrt{\frac{3^{10}(3^4 + 1)}{3^4(3^4 + 1)}} = 3^2 = 27$

19. ~ 20. '가'형과 동일

21. [출제의도] 이항분포를 이해하여 평균과 분산을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

확률변수 X 는 이항분포 $B(90, \frac{1}{3})$ 을 따르므로

확률변수 X 의 평균은 $E(X) = 90 \times \frac{1}{3} = 30$ 이고

분산은 $V(X) = 90 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 20$ 이다.

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서 $E(X^2) = 920$ 이다.

22. ~ 23. '가'형과 동일

24. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 집합의 원소의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

-2를 포함하는 원소가 세 개인 부분집합의 개수는 ${}_6 C_3 = 15$ 이므로 -2는 15번 더해진다. 다른 6개의 원소에 대해서도 같은 방법으로 생각하면 모두 15번 더해지므로 구하는 합은
 $S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = 15(-2-1+1+2+3+4) = 105$

25. '가'형과 동일

26. [출제의도] 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^n = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{0}{3}\right)\right)$ 이므로

$c_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
 $= \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2}$

27. [출제의도] 도형에 관한 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

R_1 의 짧은 변의 길이를 x 라 하면 R_2 의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 $x, 1-x$ 이고 R_1 과 R_2 가 닮음이므로 $x : 1 = (1-x) : x$

$x^2 + x - 1 = 0$ 에서 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ($\because x > 0$)

또 R_n 과 R_{n+1} 사이에 $1 : \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 의 닮음비가 성립

하므로 $l_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} l_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{l_1}{1 - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} l_1$ 이므로

$k = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ 이다.

28. [출제의도] 지수함수를 이용하여 수의 대소관계를 판정할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(1) $\frac{A}{B} = \frac{a^a b^b c^c}{a^b b^c c^a} = \left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}$ 에서

$0 < \frac{b}{c} < 1, b-c < 0$ 이므로 $\frac{A}{B} > 1 \therefore B < A$

(2) $\frac{B}{C} = \frac{a^a b^b c^c}{a^b b^c c^a} = \left(\frac{a}{c}\right)^{a-b}$ 에서

$0 < \frac{a}{c} < 1, a-b < 0$ 이므로 $\frac{B}{C} > 1 \therefore C < B$

(1), (2)에서 $C < B < A$

29. [출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

농업 또는 임업 종사자의 매년 감소율을 r 라 하면

$(1+r)^5 = 0.8 \therefore 1+r = 0.8^{\frac{1}{5}}$

2000년으로부터 n 년 후의 종사자의 수(단위:만명)는

$216(1+r)^n = 216 \times 0.8^{\frac{n}{5}}$ 이므로 $216 \times 0.8^{\frac{n}{5}} \leq 216 \times \frac{1}{2}$

양변에 로그를 취하여 정리하면 $\frac{n}{5} \log 0.8 \leq -\log 2$

$n \geq \frac{5 \times 0.3010}{0.097} = 15.5 \dots$

따라서 2000년으로부터 16년 후인 2016년 초이다.

30. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

8개 조 8경기에서 이긴 선수 8명은 4개 조로 나누어 4경기를 치른다. 이때 이긴 선수 4명은 준결승전 2경기, 결승전 1경기, 3, 4위전 1경기 등 모두 4경기를 하여 1위부터 4위까지의 순위를 결정한다. 첫 경기에서 이기고 둘째 경기에서 진 선수 4명도 위와 같이 4경기를 치러 5위부터 8위까지의 순위를 결정할 수 있다.

처음 8개 조 8경기에서 진 선수 8명도 마찬가지로 9위부터 16위까지 순위를 정할 수 있다.

따라서 1위부터 16위까지의 순위를 모두 정하기 위해서는 32경기를 치러야 한다.