# 2007학년도 대학수학능력시험 9월 모의 평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$$\log_2 16 + \log_2 \frac{1}{8} = 4 - 3 = 1$$

답 ①

2.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

이므로

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

답 ⑤

3.

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= 2 + 0 = 2$$

답 ②

4.

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 에서

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B|A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

답 ①

5. $y = \log(10 - x^2)$ 에서

$10 - x^2 > 0$ , $x^2 < 10$

$-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$

$\therefore\ A = \{x \mid -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}\}$

$y = \log(\log x)$ 에서

$\log x > 0$ 이므로 $x > 1$

$\therefore\ B = \{x \mid x > 1\}$

$\therefore\ A \cap B = \{x \mid 1 < x < \sqrt{10}\}$

따라서, 집합 $A\cap B$의 원소 중 정수인 것은 2, 3 의 2개이다.

답 ②

6. $5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$

답 ③

7. $y = \log_2 \dfrac{2}{x-1}$

$= 1 - \log_2(x-1)$

$= \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 1$

이므로 함수 $y = \log_2 \dfrac{2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 $x$축의 방향으로 1만큼, $y$축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \log_2 \dfrac{2}{x-1}$ 의 그래프의 개형은 ② 이다.

답 ②

8. $\log x$의 지표를 $n$이라 하면

$$\log x = n + \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{1}{4}\right)$$

$$\log x^2 = 2\log x$$
$$= 2(n+\alpha)$$
$$= 2n + 2\alpha \ \left(0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\right)$$

이므로 $\log x^2$의 가수는 $2\alpha$

$$\log \frac{\sqrt{10}}{x^2} = \frac{1}{2}\log 10 - \log x^2$$
$$= \frac{1}{2} - (2n + 2\alpha)$$
$$= -2n + \frac{1}{2} - 2\alpha$$

$0 < 2\alpha < \frac{1}{2}$ 이므로 $\log \frac{\sqrt{10}}{x^2}$ 의 가수는

$\frac{1}{2} - 2\alpha$

따라서 두 가수의 합은

$$2\alpha + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right) = \frac{1}{2}$$

답 ②

9. 구하는 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_2}{{}_9C_3} = \frac{4\times 10}{84} = \frac{10}{21}$$

답 ①

10. 돼지의 무게를 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(110, 10^2)$을 따른다. 우량돼지 선발대회에 보낼 세 마리의 돼지에서 최소 무게를 $k$라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{3}{200} = 0.015$$

이므로

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-110}{10}\right)$$
$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-110}{10}\right)$$
$$= 0.015$$

$$\therefore \ P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-110}{10}\right) = 0.4850$$

이 때, 표준정규분포표에서

$P(0 \leq Z \leq 2.17) = 0.4850$

이므로

$$\frac{k-110}{10} = 2.17$$

$\therefore \ k = 131.7$

따라서 우량 돼지 선발대회에 보낼 돼지의 최소 무게는 131.7kg이다.

답 ④

11. $a_n + a_{n+1} = n$이므로

$a_{n+m-1} + a_{n+m} = n + m - 1$이다.

$$\therefore \sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$$
$$= (a_{n-m+1} + a_{n-m+2}) + (a_{n-m+3} + a_{n-m+4})$$
$$+ \cdots + (a_{n+m-1} + a_{n+m})$$
$$= (n-m+1) + (n-m+3) + \cdots + (n+m-1)$$

이 때, 첫째항이 $n-m+1$, 공차가 2인 등차수열에서

$n+m-1 = (n-m+1) + 2(m-1)$은

제 $m$째 항이므로 이 등차수열의 합은

$$\frac{m\{(n-m+1)+(n+m-1)\}}{2} = mn$$

따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로

$n+m-1$, $m$, $mn$이다.

답 ①

12.

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

① $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$=3$ (수렴)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$ (수렴)

③ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=-\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=-\frac{2}{3}$ (수렴)

④ $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{6}{5}$ (수렴)

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$=\infty$ (발산)

따라서 수렴하지 않는 무한급수는 ⑤이다.

답 ⑤

13. ㄱ. $G(3)=P(X>3)$

$=1-P(0\le X\le 3)$

$=1-F(3)$ (참)

ㄴ .

$P(3\le X\le 8)=P(0\le X\le 8)-P(0\le X<3)$

$=P(0\le X\le 8)-P(0\le X\le 2)$

$=F(8)-F(2)$ (거짓)

ㄷ. $P(3\le X\le 8)=P(X\ge 3)-P(X>8)$

$=P(X>2)-P(X>8)$

$=G(2)-G(8)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

14. $S_1=2+\frac{\pi}{2}$

$S_2=\frac{\pi}{2}+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)=1+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$S_3=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$

⋮

$$S_n=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\cdots+\frac{\pi}{2^n}\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\pi$$

답 ④

15. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 $ac-b^2=0$

$\therefore\ b^2=ac$

ㄱ. $b^2=ac$에서 $b$는 $a$와 $c$의 등비중항이므로 $a$, $b$, $c$는 이 순서로 등비수열을 이룬다. (참)

ㄴ. $A+E=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & c+1 \end{pmatrix}$

이 때,

$(a+1)(c+1)-b^2=ac+a+c+1-b^2$

$=a+c+1\neq 0$

$(\because ac-b^2=0,\ a>0, c>0)$

따라서 $A+E$는 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=A$

에서 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$ab+bc=b$

$\therefore\ a+c=1\ (\because b>0)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

답 ⑤

16. $n=1,2,3,\cdots$일 때 $\mathrm{P}_n$의 좌표를 차례로 나열하면 다음과 같다.

$(1,1)\to(1,2)$ : $2^1$개

$\to(2,1)\to(2,2)\to(2,3)\to(2,2^2)$ : $2^2$개

$\to(3,1)\to(3,2)\to\cdots\to(3,2^3)$ : $2^3$개

$\to(4,1)\to(4,2)\to\cdots\to(4,2^4)$ : $2^4$개

$\cdots$

$\to(10,1)\to(10,2)\to\cdots\to(10,2^{10})$ : $2^{10}$개

따라서 구하는 $n$의 값은

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$=2^{11}-2$$

답 ③

17. 각 행에서 하나씩 택하여 곱하는 경우의 수는

$3\times3\times3=27$ (가지)

택한 수의 곱이 3으로 나누었을 때, 나머지가 1이 되는 경우는 택한 세 수의 지수의 합이 짝수일 때이다. 1행, 2행, 3행에서 택한 수의 지수를 순서쌍으로 나타내어 지수의 합이 짝수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) (짝수, 짝수, 짝수)

$1\times2\times1=2$ (가지)

(ⅱ) (짝수, 홀수, 홀수)

$1\times1\times2=2$ (가지)

(ⅲ) (홀수, 짝수, 홀수)

$2\times2\times2=8$ (가지)

(ⅲ) (홀수, 홀수, 짝수)

$2\times1\times1=2$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2+2+8+2}{27}=\frac{14}{27}$$

답 ③

18. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라고 하면

$a_4-a_2=2d=6$에서 $d=3$

$a_1+a_3=a_1+a_1+2d$

$=2a_1+6=6$

$\therefore\ a_1=0$

$\therefore\ a_6=a_1+5d=0+5\cdot3=15$

답 15

19. $9^x-3^{x+2}+18<0$ 에서

$3^x=t$ 라 하면 $t>0$ 이고

주어진 부등식은

$t^2-9t+18<0$

$(t-3)(t-6)<0$, $3<t<6$

$\therefore\ 3<3^x<6$

이 때 주어진 부등식의 해가

$\alpha<x<\beta$ 이므로 $3^\alpha<3^x<3^\beta$

따라서 $3^\alpha=3$, $3^\beta=6$

$\therefore\ 3^\alpha\cdot3^\beta=3\times6=18$

답 18

20. $a^6=3$에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$

$b^5=7$에서 $b=7^{\frac{1}{5}}$

$c^2=11$에서 $c=11^{\frac{1}{2}}$

이므로

$(abc)^n=\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot7^{\frac{1}{5}}\cdot11^{\frac{1}{2}}\right)^n$

이 때, $\left(3^{\frac{1}{6}}\cdot7^{\frac{1}{5}}\cdot11^{\frac{1}{2}}\right)^n$이 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 $n$은 $6,5,2$의 최소공배수이므로 30이다.

답 30

21. (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(n+1-n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{kn+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{k+\frac{1}{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{k+0}(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}{2}$$

$=\sqrt{k}=5$

$\therefore\ k=25$

답 25

22. 처음의 주파수를 $f_1$, 단위 면적당 질량을 $m_1$, 음향투과손실을 $L_1$이라 하면

$L_1=20\log m_1f_1-48$

주파수가 일정하고, 질량이 5배 증가되었을 때의 음향투과손실 $L$은

$L=20\log 5m_1f_1-48$

$=20(\log5+\log m_1f_1)-48$

$= 20\log\frac{10}{2} + 20\log m_1 f_1 - 48$

$= 20(1 - \log 2) + L_1$

$= 14 + L_1$

$\therefore\ a = 14$

답 14

23. $a = \log_2 n$, $b = 2^n$이므로

$a + b = \log_2 n + 2^n$

$a + b$가 세 자리의 자연수이고

$n \le 6$일 때, $a + b \le \log_2 6 + 2^6 < 100$

$n \ge 10$일 때, $a + b \ge \log_2 10 + 2^{10} > 1000$

이므로 $6 < n < 10$

$n = 7$일 때, $a + b = \log_2 7 + 2^7$은 자연수가 아니다.

$n = 8$일 때, $a + b = \log_2 8 + 2^8 = 259$

$n = 9$일 때, $a + b = \log_2 9 + 2^9$은 자연수가 아니다.

$\therefore\ a + b = 259$

답 259

24. 24. 여학생 5명을 1, 2호실에 각각 3명, 2명씩 배정하는 방법의 수는

$_5C_3 \times {_2C_2} = 10$

남학생 6명을 3, 4호실에 각각 3명씩 배정하는 방법의 수는

$_6C_3 \times {_3C_3} \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20$

따라서 구하는 모든 방법의 수는

$10 \times 20 = 200$

답 200

25. $p = \frac{2b + 3a}{2 + 3} = \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$

$q = \frac{3b + 2a}{3 + 2} = \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b$

따라서, $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$이므로

$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$이다.

$M^{-1} = 5\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 $M^{-1}$의 모든 성분의 곱은

$3 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 3 = 36$

답 36

26. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 이므로

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1+1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\therefore\ x = 2,\ y = 3$ 에서 $p = 2,\ q = 3$

$\therefore\ p + q = 5$

답 ⑤

27. 국사를 선택할 사건을 $A$, 세계사를 선택할 사건을 $B$라 하면

$P(A) = \frac{22}{35}$, $P(B) = \frac{17}{35}$

$P((A \cup B)^c) = \frac{4}{35}$

이 때, $P(A\cup B)=1-P((A\cup B)^c)$이므로

$$P(A\cup B)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$$

$$\therefore P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=\frac{22}{35}+\frac{17}{35}-\frac{31}{35}$$
$$=\frac{8}{35}$$

답 ③

28. $a_{n+1}=\dfrac{10A\cdot a_n}{10A+a_n}$ 의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{10A}$$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_{n+1}}\right\}$은 첫째항이

$\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{10A}$, 공차가 $\dfrac{1}{10A}$ 인 등차수열이다.

$$\therefore \frac{1}{a_8}=\frac{1}{10A}\times 8=\frac{4}{5A}$$

따라서 시력 0.8에 해당되는 문자의 크기는

$$a_8=\frac{5}{4}A$$

답 ④

29. 주어진 확률분포로부터 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1,\ \mathrm{V}(X)=\dfrac{9}{10}$ 에서

$np=1$ --------㉠

$np(1-p)=\dfrac{9}{10}$ -----㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$1-p=\frac{9}{10}$$

$$\therefore p=\frac{1}{10}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 $n=10$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X<2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$

$$={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(\frac{9}{10}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^9$$
$$=\left(\frac{9}{10}\right)^9\left(\frac{9}{10}+10\cdot\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{19}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^9$$

답 ①

30. $(1+ax)^7$ 의 전개식에서 일반항은

${}_7C_r(ax)^r={}_7C_r a^r x^r$ ( $r=0,1,2,\cdots,7$ )

이므로 $x^r$의 계수는 ${}_7C_r a^r$이다.

$x$의 계수는 ${}_7C_1 a=7a$ 이므로

$7a=14$ 에서 $a=2$

따라서, $x^2$의 계수는

${}_7C_2 a^2=21\cdot 4=84$

답 84