2007학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1. $\log_2 16+\log_2 \frac{1}{8}=4-3=1$

답 ①

2. $A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

이므로

$(A+B)^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

답 ⑤

3. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$=\dfrac{2+8-1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+4^2+(-1)^2}}$

$=\dfrac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\le\theta\le\pi$ 이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

답 ②

4. 연립부등식

$$\begin{cases}(x-2)(x-4)^2(x-6)\ge 0\\ \dfrac{2x-7}{x+1}\le 1\end{cases}$$

에서

$(x-2)(x-4)^2(x-6)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-6)\ge 0$ 또는 $x=4$

$\therefore\ x\ge 6$ 또는 $x\le 2$ 또는 $x=4$ ----㉠

$\dfrac{2x-7}{x+1}\le 1$

$\Leftrightarrow (2x-7)(x+1)\le (x+1)^2$

$(x+1)(x-8)\le 0$

$\therefore\ -1<x\le 8$ ----㉡

따라서 ㉠ , ㉡을 동시에 만족하는 x 의 범위는

$-1<x\le 2$ 또는 $6\le x\le 8$ 이므로

구하는 정수의 개수는

0, 1, 2, 4, 6, 7, 8 로 7개이다.

답 ④

5. $\overline{AB}=\sqrt{(b-a)^2+a^2+b^2}=\sqrt{8-2ab}$

$\overline{BC}=\sqrt{b^2+(b-a)^2+a^2}=\sqrt{8-2ab}$

$\overline{CA}=\sqrt{a^2+b^2+(b-a)^2}=\sqrt{8-2ab}$

에서 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이므로 $\triangle ABC$는 정삼각형이다. 따라서 $\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{8-2ab})^2$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(8-ab)$

이 때, S가 최소가 되려면 ab의 값이 최대가 되어야 한다.

$a>0,\ b>0$이므로

$4=a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}$

$=2ab$

$\therefore\ ab\le 2$

(단, 등호는 $a=b$일 때, 성립한다.)

따라서 ab의 최대값이 2이므로 S의 최소값은 $\frac{\sqrt{3}}{4}(8-4)=\sqrt{3}$ 이다.

답 ②

6. $0<x<1$ 일 때, $f(x)=\frac{x-1}{x}$

$1<x<2$ 일 때, $f(x)=\frac{2-x}{x-1}$

ㄱ. $\lim_{x\to1-0} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{(x-1)^3}{x}=0,$

$\lim_{x\to1+0} f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1+0}(2-x)(x-1)=0$

$\therefore\ \lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$

이 때, $f(1)g(1)=0\times0=0$ 이므로

$y=f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1-0} f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1-0}\frac{x-1}{x}\{(x-1)^3+1\}=0$

$\lim_{x\to1+0} f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to1+0}\frac{2-x}{x-1}\{(x-1)^3+1\}=\infty$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $y=f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1-0} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x-1}{x}(x^2+1)$

$=0$

$\lim_{x\to1+0} f(x)g(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{2-x}{x-1}(x-1)^3$

$=\lim_{x\to1+0}(2-x)(x-1)^2=0$

$\therefore\ \lim_{x\to1} f(x)g(x)=0$

이 때, $f(1)g(1)=0\times2=0$ 이므로

$y=f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

<참고>

$y=\frac{1}{x}-1$ 의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 y축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고,

$y=\frac{1}{x-1}-1$ 의 그래프는 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이를 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프를 그려서 생각하면 좀 더 쉽게 연속성을 파악할 수 있다.

7. $y=\log_2\frac{2}{x-1}$

$=1-\log_2(x-1)$

$=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+1$

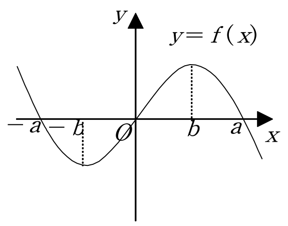
이므로 함수 $y=\log_2\frac{2}{x-1}$ 의 그래프는

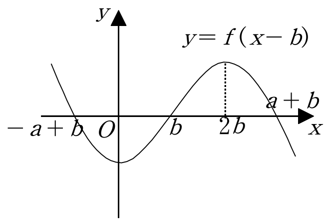
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\log_2\frac{2}{x-1}$ 의 그래프의 개형은 ② 이다.

답 ②

8. $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f(x-b)$ 의 그래프는 다음과 같다.





$$\int_{-b}^{a} f(x)\,dx = A$$

$$\int_{a}^{a+b} f(x-b)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx = B$$

$\therefore$

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \int_{-b}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= A - B$$

$\therefore \quad \int_{-b}^{a} |f(x)|\,dx$

$$= \int_{-b}^{0} \{-f(x)\}\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -(A-B) + B$$

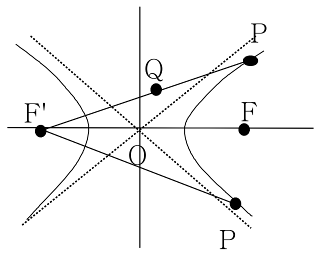
$$= -A + 2B$$

답 ①

9. 다음 그림에서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$ 이고

$\overline{PF} = \overline{PQ}$ 이므로 $\overline{PF'} - \overline{PQ} = 6$



따라서 점 Q는 점 F'으로부터 거리가 항상 6인 점이므로 점 F'을 중심으로 하고 반지름의 길이가 6인 원위의 점이다.

한편 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식이 $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 이므로 점근선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ 이고 이 때 $\angle PF'F = \theta$ 라 하면 $x > 0$일 때 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$ 이다.

따라서 점 Q가 움직이는 도형의 길이는 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$ 이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴의 호의 길이이므로

$$6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$$

답 ③

10. 돼지의 무게를 X라 하면 X는 정규분포 $N(110, 10^2)$을 따른다. 우량돼지 선발대회에 보낼 세 마리의 돼지에서 최소 무게를 k라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{3}{200} = 0.015$$

이므로

$$P(X \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-110}{10}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-110}{10}\right)$$

$$= 0.015$$

$$\therefore \quad P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-110}{10}\right) = 0.4850$$

이 때, 표준정규분포표에서

$P(0 \le Z \le 2.17) = 0.4850$
이므로
$$\frac{k-110}{10} = 2.17$$
$\therefore\ k = 131.7$
따라서 우량 돼지 선발대회에 보낼 돼지의 최소 무게는 131.7kg이다.

답 ④

11. $a_n + a_{n+1} = n$ 이므로
$a_{n+m-1} + a_{n+m} = n+m-1$ 이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{k=n-m+1}^{n+m} a_k$

$= (a_{n-m+1} + a_{n-m+2}) + (a_{n-m+3} + a_{n-m+4})$
$+ \cdots + (a_{n+m-1} + a_{n+m})$
$= (n-m+1) + (n-m+3) + \cdots + (n+m-1)$
이 때, 첫째항이 $n-m+1$, 공차가 2인 등차수열에서
$n+m-1 = (n-m+1) + 2(m-1)$ 은
제 m째 항이므로 이 등차수열의 합은
$$\frac{m\{(n-m+1)+(n+m-1)\}}{2} = mn$$
따라서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 차례로 $n+m-1$, m, mn이다.

답 ①

12. ㄱ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{k}{2n}\right)\right\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2\right\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{n}{k}\right)^2\right\}$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(S_{2k} - S_{2k-1})$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k}{2n}\right) - \frac{1}{2n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right\}$

$\displaystyle= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{2k}{2n}\right)^2 - \left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2\right\}$

$\displaystyle= \frac{1}{8n^3}\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$

$\displaystyle= \frac{1}{8n^3}\left\{4\times\frac{n(n+1)}{4} - 1\right\}$

$\displaystyle= \frac{n^2+n-1}{8n^3}$

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{8n^3}$

$= 0$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_{2k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{2k}{2n}\right)\right\}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2n}\times\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{2}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

13. ㄱ. $G(3) = P(X>3)$
$= 1 - P(0 \le X \le 3)$
$= 1 - F(3)$ (참)

ㄴ .

$P(3 \le X \le 8) = P(0 \le X \le 8) - P(0 \le X < 3)$

$= P(0 \le X \le 8) - P(0 \le X \le 2)$

$= F(8) - F(2)$ (거짓)

ㄷ. $P(3 \le X \le 8) = P(X \ge 3) - P(X > 8)$

$= P(X > 2) - P(X > 8)$

$= G(2) - G(8)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

14. $S_1 = 2 + \frac{\pi}{2}$

$$S_2 = \frac{\pi}{2} + \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$S_3 = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi$$

$$S_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \cdots + \frac{\pi}{2^n}\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \pi$$

답 ④

15. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 $ac - b^2 = 0$

$\therefore\ b^2 = ac$

ㄱ. $b^2 = ac$에서 b는 a와 c의 등비중항이므로 a, b, c는 이 순서로 등비수열을 이룬다. (참)

ㄴ. $A + E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a+1 & b \\ b & c+1 \end{pmatrix}$

이 때,

$(a+1)(c+1) - b^2 = ac + a + c + 1 - b^2$

$= a + c + 1 \ne 0$

$(\because ac - b^2 = 0,\ a > 0, c > 0)$

따라서 $A + E$는 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A$

에서 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$ab + bc = b$

$\therefore\ a + c = 1$ $(\because b > 0)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

답 ⑤

16. $n = 1, 2, 3, \cdots$ 일 때 P_n의 좌표를 차례로 나열하면 다음과 같다.

$(1,1) \to (1,2)$: 2^1개

$\to (2,1) \to (2,2) \to (2,3) \to (2,2^2)$: 2^2개

$\to (3,1) \to (3,2) \to \cdots \to (3,2^3)$: 2^3개

$\to (4,1) \to (4,2) \to \cdots \to (4,2^4)$: 2^4개

$\cdots$

$\to (10,1) \to (10,2) \to \cdots \to (10,2^{10})$: 2^{10}개

따라서 구하는 n의 값은

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$= 2^{11} - 2$$

답 ③

17. 각 행에서 하나씩 택하여 곱하는 경우의 수는

$3 \times 3 \times 3 = 27$ (가지)

택한 수의 곱이 3으로 나누었을 때, 나머지가 1이 되는 경우는 택한 세 수의 지수의 합이 짝수일 때이다. 1행, 2행, 3행에서 택한 수의 지수를 순서쌍으로 나타내어 지수의 합이 짝수인 경우는 다음과 같다.

(i) (짝수, 짝수, 짝수)

$1 \times 2 \times 1 = 2$ (가지)

(ii) (짝수, 홀수, 홀수)

$1 \times 1 \times 2 = 2$ (가지)

(iii) (홀수, 짝수, 홀수)

$2 \times 2 \times 2 = 8$ (가지)

(iii) (홀수, 홀수, 짝수)

$2 \times 1 \times 1 = 2$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2+2+8+2}{27} = \frac{14}{27}$$

답 ③

18. $\lim_{x \to 0} \frac{20x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{20x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x})(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{20x(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})}{2x}$

$= \lim_{x \to 0} 10(\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x})$

$= 10(2+2)$

$= 40$

답 40

19. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$ 에서

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$= 6(x^2 - 3x + 2)$

$= 6(x-1)(x-2)$

이 때 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 극대값 M 과 극소값 m 의 곱은

$Mm = f(1) \times f(2)$

이다. 따라서

$f(1) = 2 - 9 + 12 + 2 = 7$

$f(2) = 16 - 36 + 24 + 2 = 6$

이므로

$Mm = f(1) \times f(2) = 7 \times 6 = 42$

답 42

20. $y' = 3x^2$ 이므로 점 $P(t, t^3)$ 에서의 접선의 방정식은

$y = 3t^2(x-t) + t^3$

즉, $3t^2x - y - 2t^3 = 0$ …㉠

직선 ㉠과 원점 사이의 거리 $f(t)$는

$$f(t) = \frac{|-2t^3|}{\sqrt{(3t^2)^2 + (-1)^2}}$$

$\therefore \lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{2t^3}{t\sqrt{9t^4+1}}$

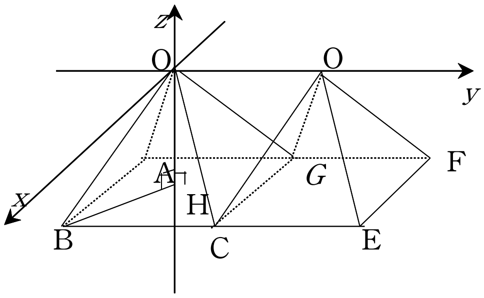
$= \frac{2}{3}$

$\therefore 30\alpha = 20$

답 20

21. 점 O에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH}=\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{OH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$$



이 때, 그림과 같이 좌표공간을 설정하면 두 점 B, F의 좌표는 각각

$B\,(1,-1,-\sqrt{2})$, F $(-1,3,-\sqrt{2})$

$\therefore$ $\overrightarrow{OB}=(1,-1,-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{OF}=(-1,3,-\sqrt{2})$

$\therefore$ $|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}|^2=|(0,2,-2\sqrt{2})|^2$

$=0^2+2^2+(-2\sqrt{2})^2$

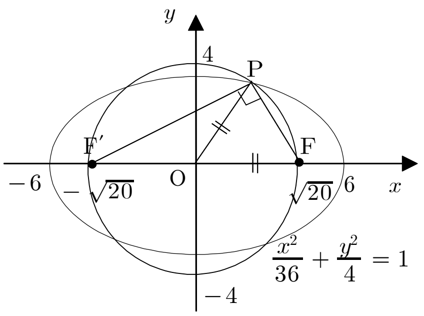
$=4+8=12$

답 12

22. 타원의 정의로부터

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12$ ----- ㉠

또, $\overline{OP}=\overline{OF}$ 이므로 아래 그림과 같이 점 P는 중심이 원점이고 지름의 길이가 $\overline{FF'}$ 인 원 위의 점이다.



이 때, $\angle FPF'=90^\circ$ 이고 $\overline{FF'}=2\sqrt{36-16}$ $=2\sqrt{20}$ 이므로

$\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2=80$ ------㉡

따라서 ㉠과 ㉡으로부터

$\overline{PF}\cdot\overline{PF'}=\dfrac{1}{2}\left\{(\overline{PF}+\overline{PF'})^2-(\overline{PF}^2+\overline{PF'}^2)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}(12^2-80)$

$=32$

답 32

23. $a=\log_2 n$, $b=2^n$ 이므로

$a+b=\log_2 n+2^n$

$a+b$가 세 자리의 자연수이고

$n\le 6$ 일 때, $a+b\le\log_2 6+2^6<100$

$n\ge 10$ 일 때, $a+b\ge\log_2 10+2^{10}>1000$

이므로 $6<n<10$

$n=7$ 일 때, $a+b=\log_2 7+2^7$ 은 자연수가 아니다.

$n=8$ 일 때, $a+b=\log_2 8+2^8=259$

$n=9$ 일 때, $a+b=\log_2 9+2^9$ 은 자연수가 아니다.

$\therefore$ $a+b=259$

답 259

24. 여학생 5명을 1, 2호실에 각각 3명, 2명씩 배정하는 방법의 수는

$${}_5C_3\times{}_2C_2=10$$

남학생 6명을 3, 4호실에 각각 3명씩 배정하는 방법의 수는

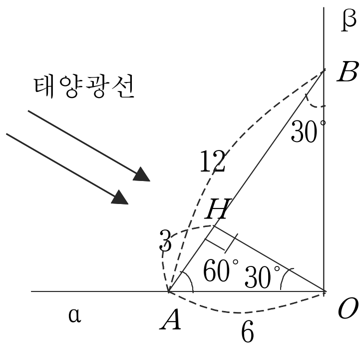
$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2! = 20$$

따라서 구하는 모든 방법의 수는

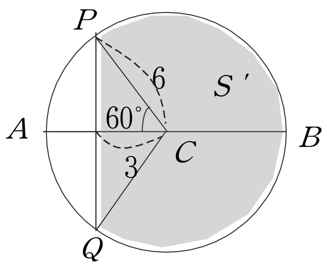
$$10 \times 20 = 200$$

답 200

25. 반지름의 길이가 6인 원판이 평면 α, β와 맞닿는 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 교선 l에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 주어진 상황의 단면을 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



따라서 그림자가 S부분에 해당되는 영역 S'은 원판에서 다음과 같다.



$S' = 6^2\pi - \{$(부채꼴 PQC의 넓이)

-(삼각형 PQC의 넓이)$\}$

$$= 36\pi - \left(\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 36\pi - (12\pi - 9\sqrt{3})$$

$$= 24\pi + 9\sqrt{3}$$

이 때, $S = \dfrac{S'}{\cos 30^\circ}$이므로

$$S = \frac{24\pi + 9\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 18 + 16\sqrt{3}\pi$$

$\therefore\ a = 18,\ b = 16$

$\therefore\ a + b = 34$

답 34

[미분과 적분]

26.

$$\tan\Theta = \frac{2\tan\frac{\Theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\Theta}{2}} = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \ \cos\Theta = \frac{5}{13} \quad (\because \ 0<\Theta<\frac{\pi}{2})$$

답 ⑤

27. 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}(e^x \ln y) = \frac{d}{dx}(1)$

$e^x \ln y + e^x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \ \frac{dy}{dx} = -y\ln y$

따라서 점 $(0, e)$에서의 접선의 기울기는 $-e \cdot \ln e$ 즉, $-e$이다.

답 ①

28. ㄱ. $f(x)$ 는 미분가능하므로 연속함수이다.

$f(-1)=-1$, $f(0)=1$ 이므로

중간값의 정리에 의하여

$f(c_1)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_1이 구간 $(-1,0)$에 적어도 한 개 존재한다.

또한, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이므로

$f(c_2)=\frac{1}{2}$ 인 실수 c_2가 구간 $(0,1)$에 적어도 한 개 존재한다.

따라서, $f(a)=\frac{1}{2}$ 인 실수 a가 구간 $(-1,1)$에 적어도 두 개 존재한다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)+x$로 놓으면

$f(x)$ 가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

$g(0)=f(0)+0=1+0=1$

$g(1)=f(1)+1=0+1=1$

이므로 롤의 정리에 의하여

$g'(b)=0$ 인 실수 b가 구간 $(0,1)$에 적어도 한 개 존재한다.

$g'(x)=f'(x)+1$ 이므로

$g'(b)=f'(b)+1=0$ 에서 $f'(b)=-1$

따라서, $f'(b)=-1$ 인 실수 b가 구간 $(0,1)$에 적어도 한 개 존재한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ 이면

$f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$ 이지만

$f'(x)=-3x+\frac{1}{2}$

$f''(x)=-3$ 이므로

$f''(c)=0$ 인 실수 c는 존재하지 않는다. (거짓)

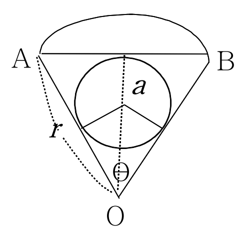
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

29. 오른쪽 그림에서

삼각형 OAB

넓이는



$\triangle OAB = \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

한편 삼각형 OAB 의 내접원의 반지름의 길이를 a 라 하면

$\triangle OAB = \frac{1}{2} ra + \frac{1}{2} ra + \frac{1}{2} a \times \overline{AB}$

이 때 $\overline{AB} = 2r \sin\frac{\theta}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} r^2 \sin\theta = ar + ar \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\frac{1}{2} r \sin\theta}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}$$

따라서 $l_1 = r\theta$, $l_2 = \dfrac{\pi r \sin\theta}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}$ 이므로

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{l_2}{l_1} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{r\theta} \times \frac{\pi r \sin\theta}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\pi}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= 1 \times \pi = \pi$$

답 ③

30. $S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x \right| dx$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| \, dx$$

이 때, $y = |\sin x|$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| \, dx = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

$$\therefore S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| \, dx$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$\therefore \alpha = 2$

$\therefore 50\alpha = 100$

답 100

[확률과 통계]

26. (평균)

$= \{1 + 2 + 4 \times 10 + (10 + a) + 2 \times 20 + 2(20 + b) + 4 \times 30 + (30 + c) + 40 + 2 \times 42 + 43\} \div 20$

$= \dfrac{450 + a + 2b + c}{20} = 23$

$\therefore a + 2b + c = 10 \quad \cdots ㉠$

한편, 중간값은 20개의 자료 중 10번째로 큰

수와 11번째로 큰 수의 평균과 같으므로

(중간값)

$$= \frac{(20+b)+(20+b)}{2} = 20+b = 24$$

$\therefore\ b=4\ \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡을 계산하면

$$a+b+c=6$$

답 ①

27. 완주시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(5, 1^2)$을 따른다.

이 때, 참가자 중 임의추출한 100명의 평균완주시간을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(5, \frac{1}{100}\right)$ 즉, $\mathrm{N}\left(5, \left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}\left(4+\frac{51}{60} \leqq \overline{X} \leqq 5+\frac{12}{60}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{97}{20} \leqq \overline{X} \leqq \frac{26}{5}\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{\frac{97}{20}-5}{\frac{1}{10}} \leqq Z \leqq \frac{\frac{26}{5}-5}{\frac{1}{10}}\right)$$

$$=\mathrm{P}(-1.5 \leqq Z \leqq 2)$$

$$=\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 1.5)+\mathrm{P}(0 \leqq Z \leqq 2)$$

$$=0.4332+0.4772$$

$$=0.9104$$

답 ②

28. 한 상자에서 3개를 임의추출할 때 나오는 상한 과일의 개수를 확률변수 X라고 하면

$$P(X=0) = \frac{{}_{38}C_3}{{}_{40}C_3} = \frac{111}{130}$$

$$P(X \geq 1) = 1-P(X=0) = 1-\frac{111}{130} = \frac{19}{130}$$

이므로 한 상자를 판매할 때 판매액의 기댓값은

$$5000\times\frac{111}{130}+6000\times\frac{19}{130}\ \text{(원)}$$

이고, 130상자를 판매할 때 전체 판매액의 기댓값은

$$130\times\left(5000\times\frac{111}{130}+6000\times\frac{19}{130}\right)$$

$$=555000+114000$$

$$=669000\ \text{(원)}$$

답 ⑤

29. 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$\hat{p}=\frac{400}{1000}=0.4$ 이므로

신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이 N은

$$N=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{1000}}$$

한편 이 때의 최대 허용 표본 오차 M은

$$M=1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}=1.96\times\sqrt{\frac{1}{4000}}$$

$$\therefore\ \frac{N}{2M}=\frac{2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{1000}}}{2\times1.96\times\sqrt{\frac{1}{4000}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{1000}}}{\sqrt{\frac{1}{4000}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

답 ④

30. 1일째 표본의 범위는 $77-50=27$

2일째 표본의 범위는 $70-48=22$

3일째 표본의 범위는 $69-x$ ($\because x<70$)

이들 세 범위의 평균은

$$\frac{27+22+69-x}{3}=2\cdot 11$$

$$\frac{118-x}{3}=22$$

$\therefore\ x=118-66=52$

답 52

[이산수학]

26. $n=1,2,3,\cdots$ 일 때 3^n을 5로 나눈 나머지를 차례로 쓰면

3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, ⋯

과 같이 3, 4, 2, 1이 주기적으로 반복된다.

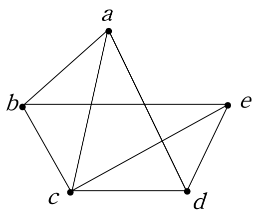
이 때, $303=4\times75+3$이므로 3^{303}을 5로 나눈 나머지는 2이다.

답 ②

27. 반례는 꼭지점을 적절하게 색칠하는 데 필요한 최소의 색의 수가 2이지만 수형도는 아닌 것이다.
수형도는 회로를 갖지 않는 연결된 그래프이므로 보기 중 수형도가 아닌 것은 ③, ④, ⑤이다.
이 중 ③과 ⑤는 꼭지점을 색칠하는데 필요한 최소의 색수는 3개이고 ④는 2개이므로 반례로 알맞은 것은 ④이다.

답 ④

28. 주어진 인접행렬을 이용하여 5개의 꼭지점을 연결한 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 변의 개수는

$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ be,\ cd,\ ce,\ de$

의 8개이다. (참)

ㄴ. 각 꼭지점의 차수는

$a:3,\ \ b:3,\ \ c:4,\ \ d:3,\ \ e:3$

이므로 차수가 3차인 꼭지점은 a, b, d, e의 4개이다. (참)

ㄷ. 꼭지점 a에서 꼭지점 c를 잇는 두 개의 변으로 이루어진 경로는

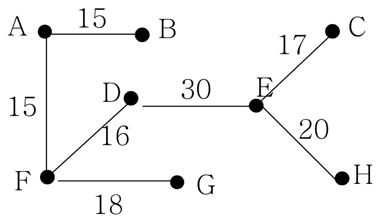
$abc,\ adc$

의 2개이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

29. 도시 D와 도시 E 사이를 직접 연결하면서 모든 도시가 연결되도록 도로망을 연결할 때 최소비용으로 연결하는 방법은 다음과 같다.



따라서 필요한 최소비용은

$15+16+30+17+15+18+20=131$

답 ①

30. 지점 A에서 출발하여 5개의 지점을 거쳐 B, C, D, I, J, K 지점 L에 도착하는 경우는 다음과 같다.

(i)의 6개의 점에서 한 점을 거친 후에 E, F, G, H를 거치는 경우

${}_6C_1=6$(가지)

(ii) E와 H를 거치고, F와 G 중 한 점을 거치지 않고, B와 C, C와 D, I와 J, J와 K를 연속하여 거치는 경우의 수는

4(가지)

(iii) E와 H를 거치고, F와 G를 모두 거치지 않는 경우의 수는

2(가지)

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+4+2=12$ (가지)

답 12