

2007학년도 대학수학능력시험 모의 평가 (수리영역-나형) 정답 및 해설

1.

$$(주어진 식) = \left(3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = 3^1 = 3$$

답 ③

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A + 2A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 ⑤

3.

$$(주어진 식) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1+0} = \frac{1}{4}$$

답 ①

4. $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$

$$(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 1) = 0$$

$$\therefore \log_2 x = 2, \log_2 x = 1$$

$$\therefore x = 4, x = 2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 4 + 2 = 6$$

답 ③

5. 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-a)$ 는 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가할수록 y 의 값은 감소한다. 따라서 $x=8$ 일 때 최소값을 가지므로 $\log_{\frac{1}{2}}(8-a) = -2$ 이어야 한다.

$$\therefore 8 - a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$\therefore a = 4$$

답 ④

6. $2^{x+3} > 4 = 2^2$ 에서

밑이 1보다 크므로

$$x+3 > 2$$

$$\therefore x > -1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$2\log(x+3) < \log(5x+15)$ 에서

밑이 1보다 크므로

$$(x+3)^2 < 5x+15$$

$$x^2 + x - 6 < 0$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 2 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠과 ㉡의 공통범위는

$$-1 < x < 2$$

따라서 구하는 정수 x 의 개수는

0, 1의 2개 이다.

답 ①

7. ㄱ. $f(2) = 2^2 - \log_2 2 = 4 - 1 = 3$ (참)

ㄴ. $f(8) = 2^8 - \log_2 8 = 256 - 3 = 253,$

$$f(\log_2 8) = f(3) = 2^3 - \log_2 3$$

$$\therefore f(8) \neq -f(\log_2 8) \text{ (거짓)}$$

ㄷ. (좌변) $= f(2^n) + n = 2^{2^n} - \log_2 2^n + n$

$$= 2^{2^n} - n + n = 2^{2^n}$$

$$f(2^{n-1}) = 2^{2^{n-1}} - \log_2 2^{n-1} = 2^{2^{n-1}} - (n-1) \text{ 이}$$

므로

$$(우변) = (2^{2^{n-1}})^2 = 2^{2^n}$$

$$\therefore f(2^n) + n = \{f(2^{n-1}) + n - 1\}^2 \text{ (참)}$$

답 ④

8. $A = \begin{pmatrix} 2-2^a & 1+2^{a-2} \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 이 역행렬을 갖지 않으려면

$$(2-2^a) \cdot 3 - (1+2^{a-2}) \cdot 4 = 0$$

$$6 - 3 \cdot 2^a - 4 - 2^{a-2} \cdot 4$$

$$= 2 - 4 \cdot 2^a$$

$$= 2 - 2^{a+2} = 0$$

$$\therefore 2 = 2^{a+2}$$

$$\therefore a = -1$$

답 ④

9. 구하는 a_1, a_2, a_3 의 순서쌍

(a_1, a_2, a_3) 의 개수는

$(2, 4, 6), (4, 6, 8), (6, 8, 10),$

$(8, 10, 12), (2, 6, 10), (4, 8, 12)$

의 6이다.

답 ②

$$10. a_n = \frac{1}{2} n h_n \dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

공비를 r 라 하면

$$a_n = \frac{1}{2} r^{n-1} \dots \textcircled{2}$$

\therefore 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{1}{2}$ 이면

$\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} n h_n$$

$$\therefore h_n = \frac{1}{n} \text{ (참)}$$

$\therefore h_2 = \frac{1}{4}$ 이면 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에서

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot r$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (참)}$$

$\therefore h_2 < \frac{1}{2}$ 이면

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot r \text{에서}$$

$$0 < r = 2h_2 < 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n-1} = 0 \text{ (참)}$$

($\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $n h_n = r^{n-1}$)

따라서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄴ}, \text{ㄷ}$ 이다.

답 ⑤

11. 점 P_n 의 좌표를 차례로 나열하면 다음과 같다.

$$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$P_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), P_6\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$P_7\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_8\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$P_9\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \dots$$

따라서 P_{8n+k} (n 은 정수, $k=1,2,3,\dots,8$)

의 좌표는 P_k 의 좌표와 같다.

$2007 = 8n + 7$ 꼴이므로 점 P_{2007} 의 좌표는

P_7 의 좌표와 같다.

$$\therefore P_{2007}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

답 ①

12. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 의 양변에 A^2 을 곱하면

$$A^2A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A^2A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= -A^3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= E\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because A^3 + E = O) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

답 ②

13. \neg . 10과 99는 모두 두 자리의 자연수이므로 $\log 10, \log 99$ 의 지표는 1로 같다.

$$\therefore A_{10} = \{10, 11, 12, \dots, 99\} = A_{99} \text{ (참)}$$

\sqsubset . \neg 에서 $n(A_{10}) = 90$ 이다.

한편, 100은 세 자리의 자연수이므로

$$A_{100} = \{100, 101, 102, \dots, 999\}$$

$$\therefore n(A_{100}) = 900$$

$$\therefore n(A_{100}) = 10 \cdot n(A_{10}) \text{ (참)}$$

\sqsupset . $A_p \cap A_q \neq \emptyset$ 이므로 $r \in A_p \cap A_q$ 라 하면 $r \in A_p$ 이고 $r \in A_q$ 이다.

따라서 ($\log r$ 의 지표) = ($\log p$ 의 지표)이고

($\log r$ 의 지표) = ($\log q$ 의 지표)이므로

($\log p$ 의 지표) = ($\log q$ 의 지표)이다.

$$\therefore A_p = A_q \text{ (참)}$$

답 ⑤

14. 첫째 해의 연봉 : a 원

2년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)$ 원

3년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)^2$ 원

...

19년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)^{18}$ 원

20년째 해의 연봉 : $\frac{2}{3}a(1+0.08)^{18}$

따라서 이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은

$$\begin{aligned} &a + a \times 1.08 + a \times 1.08^2 + a \times 1.08^3 \\ &\quad + \dots + a \times 1.08^{17} + a \times 1.08^{18} \\ &\quad + \frac{2}{3}a \times 1.08^{18 \times 9} \end{aligned}$$

$$= a + \frac{a \times 1.08(1.08^{18} - 1)}{1.08 - 1} + 6a \times 1.08^{18}$$

$$= a + \frac{a \times 1.08(4 - 1)}{0.08} + 6a \times 4$$

$$= 25a + \frac{81}{2}a$$

$$= \frac{131}{2}a$$

답 ④

15. 12명을 4명씩 A, B, C의 세 조로 나누고 하자.

각 지역에서 선발된 3명을 세 조에 한 명씩 배치하는 경우의 수는 각각 $3! = 6$ 이므로

4지역의 12명을 모두 배치하는 경우의 수는 6^4 이다.

그런데, 세 조 A, B, C는 서로 구별되지 않으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6^4}{3!} = 6^3 = 216$$

답 ③

$$16. \quad I_1 = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} a$$

$$I_{n+1} = \frac{I_n}{\cos 30^\circ}$$

$$\therefore \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

따라서 수열 $\{I_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{\sqrt{3}} a$ 이고 공

비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 인 등비수열이므로

$$I_n = \frac{2}{\sqrt{3}} a \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$

$$= a \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{I_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 3}{a} = \sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2 + \sqrt{3}$$

답 ③

$$17. \quad 2 + 3 \cdot 2 + \dots + n(n-1)$$

$$= 2(2-1) + 3(3-1) + \dots + n(n-1)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 - (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore (가) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{2d \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right\}}{n(n+1)}$$

$$= 2d \left\{ \frac{2n+1}{6} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{2d(2n+1-3)}{6} = \frac{2}{3} d(n-1)$$

$$\therefore (나) = \frac{2}{3} d$$

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + (n+1)}$$

$$= \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + 2 + \dots + (n+1)} \cdot \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot b_n$$

$$= \frac{n}{n+2} \cdot b_n$$

$$\therefore (다) = \frac{n}{n+2}$$

답 ①

참고

주어진 증명을 완성하면 다음과 같다.

$$b_{n+1} = \frac{n}{n+2} b_n + \frac{2}{n+2} a_{n+1}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) b_n + \frac{2}{n+2} a_{n+1}$$

$$= b_n - \frac{2}{n+2} b_n + \frac{2}{n+2} a_{n+1}$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = \frac{2}{n+2} (a_{n+1} - b_n) \dots \textcircled{1}$$

그런데, 등차수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 a' , 공차를 d' 이라 하면 $b_{n+1} - b_n = d'$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$d' = \frac{2}{n+2} (a_{n+1} - b_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{d'}{2} (n+2) + b_n$$

$$= \frac{d'}{2} (n+2) + a' + (n-1)d'$$

$$= \left(a' + \frac{3}{2} d'\right) + \frac{3}{2} d'(n-1)$$

따라서 수열 $\{a_{n+1}\}$ 은

$a_2 = a' + \frac{3}{2}d'$ 이고 공차가 $\frac{3}{2}d'$ 인 등차수열이다.

그런데, $a_1 = b_1 = a'$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 a' , 공차가 $\frac{3}{2}d'$ 인 등차수열이다.

$$\begin{aligned} 18. a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= 100^2 - 99^2 - 3(100 - 99) \\ &= (100 + 99)(100 - 99) - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

답 196

$$\begin{aligned} 19. (3x+y)^6 &= \sum_{r=0}^6 {}_6C_r (3x)^r y^{6-r} \\ &= \sum_{r=0}^6 {}_6C_r \cdot 3^r \cdot x^r y^{6-r} \end{aligned}$$

따라서 x^2y^4 은 $r=2$ 일 때이므로 구하는 계수는 ${}_6C_2 \cdot 3^2 = 15 \cdot 9 = 135$ 이다.

답 135

20. 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시키면

$$y=2^{x-m}+n$$

이다. 이 함수의 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(0, 5)$ 를 지나므로

$$2^{-1-m}+n=1 \cdots \text{㉠}$$

$$2^{-m}+n=5 \cdots \text{㉡}$$

㉡ - ㉠을 하면

$$2^{-m} - 2^{-1-m} = 4$$

$$2^{-m}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$$

$$2^{-m} = 8 = 2^3$$

$$\therefore m = -3$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$n = -3$$

$$\therefore m^2 + n^2 = 18$$

답 18

21. $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$y = 1 + 3\log_2 x$ 에서 x, y 를 서로 바꾸면

$$x = 1 + 3\log_2 y, \quad \frac{x-1}{3} = \log_2 y$$

$$\therefore y = 2^{\frac{x-1}{3}}$$

따라서 $g(x) = 2^{\frac{x-1}{3}}$ 이므로

$$g(13) = 2^{\frac{13-1}{3}} = 2^4 = 16$$

답 16

다른 풀이

$f(x) = 13$ 을 만족하는 x 의 값을 구하면

$$1 + 3\log_2 x = 13 \text{에서 } \log_2 x = 4$$

$$\therefore x = 2^4 = 16$$

$$\therefore g(f(16)) = g(13) = 16$$

22. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 8E$$

$$\begin{aligned} \therefore A^6 &= A^3 A^3 \\ &= 8^2 E^2 \\ &= 64E \end{aligned}$$

$$\therefore A^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 64E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 64 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a=64, \quad b=64$$

$$\therefore a+b=128$$

답 128

23. $\log a^3$ 의 가수가 0이면 $\log a^3 = k$ (k 는 정수)이므로 $a^3 = 10^k$ 이다.

$$\therefore a = 10^{\frac{k}{3}}$$

이 때, $1 < a < 10$ 이므로 정수 k 의 최대값은 2이다.

마찬가지로 $b^5 = 10^n$ (n 은 정수)이므로

$$b = 10^{\frac{n}{5}}$$

이 때, $1 < b < 10$ 이므로 정수 n 의 최대값은 4이다.

따라서 $ab = 10^{\frac{k}{3} + \frac{n}{5}}$ 의 최대값은

$$10^{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}} = 10^{\frac{22}{15}}$$

$$\therefore p+q = 15 + 22 = 37$$

답 37

24. (i) A, B 를 포함하는 세트의 개수

C 를 제외한 5개의 과자에서 2개를 택하는 방법의 수이므로

$${}_5C_2 = 10 \text{ (가지)}$$

(ii) A, B 를 포함하지 않는 세트의 개수

A, B 를 제외한 6개의 과자에서 4개를 택하는 방법의 수이므로

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ (가지)}$$

따라서 (i), (ii)에 의해 서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수는

$$10 + 15 = 25 \text{ (가지)}$$

답 25

$$25. \quad 50 = 20 + 180 \times 3^{-\frac{n}{256}} \text{ 이므로 } 3^{-\frac{n}{256}} = \frac{1}{6}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$-\frac{n}{256} \log 3 = \log \frac{1}{6} = -\log 2 - \log 3$$

$$\therefore n = \frac{256(\log 2 + \log 3)}{\log 3}$$

$$= \frac{256 \times 0.78}{0.48} = 416$$

답 416

$$26. \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = \sqrt{3} \text{ of } 2 \cdot 1 = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$a_3 = \sqrt{3} \text{ of } 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$a_4 = \sqrt{3} \text{ of } 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$a_6 = \sqrt{3} \text{ of } 2 \cdot 1 = 2^{\frac{1}{3}}$$

...

$$a_{4n-3} = 1, \quad a_{4n-2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$a_{4n-1} = 2^{\frac{2}{3}}, \quad a_{4n} = 2 \quad (n=1, 2, 3 \dots)$$

$$\therefore a_{112} = a_{4 \times 28} = 2$$

답 ⑤

27. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r , s 이라 하자.

주어진 행렬이 역행렬을 갖지 않으므로

$$\begin{aligned} a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} &= (a_1 r^{n-1})(b_1 s^{n-1}) - (a_1 r^n)(b_1 s^n) \\ &= (a_1 r^{n-1})(b_1 s^{n-1})(1 - rs) = 0 \\ \therefore rs &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $s = \frac{1}{r}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \frac{b_1}{1-s} = \frac{b_1}{1-\frac{1}{r}} \\ &= \frac{b_1 \cdot r}{r-1} = \frac{b_1 \cdot ar}{ar-a} \\ &= \frac{a_2 b_1}{a_2 - a_1} \quad (\because ar = a_2) \end{aligned}$$

답 ②

28. 무한등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r_1 , 무한등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b , 공비를 r_2 라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= ar_1^{n-1}, \quad b_n = br_2^{n-1} \\ \neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n &\text{이 수렴하므로} \\ -1 < r_1 < 1, \quad -1 < r_2 < 1 \\ a_n b_n &= ar_1^{n-1} br_2^{n-1} = ab(r_1 r_2)^{n-1} \\ \text{에서 } -1 < r_1 r_2 < 1 &\text{이므로} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \frac{ab}{1-r_1 r_2} \quad (\text{수렴}) \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

\neg . (반례) $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n-1}$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산하지만

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= (-1)^n + (-1)^{n-1} = 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= 0 \quad (\text{거짓}) \end{aligned}$$

\square . $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$ 이 수렴하므로

$$-1 < r_1^3 < 1, \quad -1 < r_2^3 < 1$$

$$\therefore -1 < r_1 < 1, \quad -1 < r_2 < 1$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이므로}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 수렴한다. (참)

따라서 옳은 것은 \neg , \square 이다.

답 ④

29. \neg . (반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 이면

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

이 때, $3(-3) - 5(-3) \neq 0$ 이다. (거짓)

\square . $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ 라 하면

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} ax+bx & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bz-cy & ay+bw-bx-dy \\ cx+dz-az-cw & cy-bz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore p + s = (bz - cy) + (cy - bz) = 0 \quad (\text{참})$$

\square . $A = E$ 일 때 임의의 이차정사각행렬 B 에 대하여 $AB = BA$ 즉, $AB - BA = O$ 이지만 반드시 B 가 A 의 역행렬인 것은 아니다. (거짓)

답 ②

30. 놀이 기구의 좌석을 다음과 같이 나타내면

A					
B					

(i) A행의 좌석에서 2개를 택하여 남학생 두 명을 앉히는 방법의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20 \text{ (가지)}$$

각각의 옆자리에는 여학생을 앉히는 방법의 수는

$$2 \text{ (가지)}$$

이므로 구하는 방법의 수는

$$20 \times 2 = 40 \text{ (가지)}$$

마찬가지로, A행의 두 좌석에 여학생을 앉히는 방법을 생각하면 구하는 경우의 수는

$$20 \times 2 = 40 \text{ (가지)}$$

(ii) 남학생 1명과 여학생 1명을 택하여 A행의 두 좌석에서 앉히면 그 옆자리에 앉는 사람은 주어진 조건에 의해 자동으로 결정되므로 구하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_5P_2 = 2 \times 2 \times 20 \\ = 80 \text{ (가지)}$$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$$40 + 40 + 80 = 160 \text{ (가지)}$$