제 2 교시

수리 영역

나 형

성명		수험 번호	

○ 자신이 선택한 유형('가'형/ '나'형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지에 성명과 수험 번호를 정확히 써 넣으시오.

○ 답안지에 성명과 수험 번호를 써 넣고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\left(3 \cdot 9^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt[3]{3^2}$ ③ 3
④ $\sqrt[3]{3^4}$ ⑤ $\sqrt[3]{3^5}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2A^{-1}$은? [2점]

① $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
④ $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n-1}}{4^n+3^n}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

4. 로그방정식 $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

5. 정의역이 $\{x \mid 5 \leq x \leq 8\}$인 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-a)$의 최소값이 -2일 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 연립부등식

$$\begin{cases} 2^{x+3} > 4 \\ 2\log(x+3) < \log(5x+15) \end{cases}$$

를 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

7. 자연수 n에 대하여 $f(n) = 2^n - \log_2 n$이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(2) = 3$

ㄴ. $f(8) = -f(\log_2 8)$

ㄷ. $f(2^n) + n = \{f(2^{n-1}) + n - 1\}^2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

8. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2-2^a & 1+2^{a-2} \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않을 때, a의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

9. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

10. 자연수 n에 대하여 원점 O와 점 $(n, 0)$을 이은 선분을 밑변으로 하고, 높이가 h_n인 삼각형의 넓이를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 등비수열일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{1}{2}$이면 $h_n = \frac{1}{n}$이다.

ㄴ. $h_2 = \frac{1}{4}$이면 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.

ㄷ. $h_2 < \frac{1}{2}$이면 $\lim_{n\to\infty} n h_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 자연수 n에 대하여 점 P_n이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다. (단, 점 P_n은 좌표축 위의 점이 아니다.)

(가) 점 P_n이 제1사분면 위의 점이면,
점 P_{n+1}은 점 P_n을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시킨 점이다.

(나) 점 P_n이 제2사분면 또는 제4사분면 위의 점이면,
점 P_{n+1}은 점 P_n을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

(다) 점 P_n이 제3사분면 위의 점이면,
점 P_{n+1}은 점 P_n을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 P_1의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$일 때, 점 P_{2007}의 좌표는? [3점]

① $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
③ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
⑤ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

12. 이차정사각행렬 A는 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $A^3+E=O$
> (나) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 영행렬이고 E는 단위행렬이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$A_k=\{\,l\mid l$은 자연수, $(\log l$의 지표$)=(\log k$의 지표$)\}$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

> <보 기>
> ㄱ. $A_{10}=A_{99}$
> ㄴ. $n(A_{100})=10\cdot n(A_{10})$
> (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)
> ㄷ. $A_p\cap A_q\neq\phi$ 이면 $A_p=A_q$이다.
> (단, p와 q는 자연수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

> (가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
> (나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.) [4점]

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$
④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

15. 어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는? [3점]

① 80 ② 144 ③ 216
④ 240 ⑤ 288

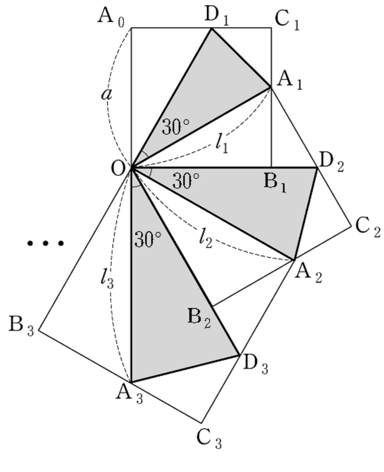
16. 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $\mathrm{OB_1C_1A_0}$이 있다.

삼각형 $\mathrm{OA_1D_1}$이 $\angle \mathrm{D_1OA_1}=30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 $\mathrm{B_1C_1}$, $\mathrm{A_0C_1}$ 위에 각각 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{D_1}$을 잡고 변 $\mathrm{OA_1}$의 길이를 l_1이라 하자.

선분 $\mathrm{OA_1}$을 한 변으로 하는 정사각형 $\mathrm{OB_2C_2A_1}$에서 삼각형 $\mathrm{OA_2D_2}$가 $\angle \mathrm{D_2OA_2}=30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 $\mathrm{B_2C_2}$, $\mathrm{A_1C_2}$ 위에 각각 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{D_2}$를 잡고 변 $\mathrm{OA_2}$의 길이를 l_2라 하자.

선분 $\mathrm{OA_2}$를 한 변으로 하는 정사각형 $\mathrm{OB_3C_3A_2}$에서 삼각형 $\mathrm{OA_3D_3}$이 $\angle \mathrm{D_3OA_3}=30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 $\mathrm{B_3C_3}$, $\mathrm{A_2C_3}$ 위에 각각 점 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{D_3}$을 잡고 변 $\mathrm{OA_3}$의 길이를 l_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{D}_n$에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\sqrt{3}$일 때, a의 값은? [4점]



① $\sqrt{3}$　② $1+\sqrt{3}$　③ $2+\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$　⑤ $6+\sqrt{3}$

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\quad(n\geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\{b_n\}$이 등차수열임을 증명하는 과정이다.

<증명>

수열 $\{a_n\}$을 첫째항 a, 공차 d인 등차수열이라 하면,

$$b_n=\frac{a+2(a+d)+3(a+2d)+\cdots+n\{a+(n-1)d\}}{1+2+\cdots+n}$$

$$=\frac{a(1+2+\cdots+n)+d\{2+3\cdot 2+\cdots+n\cdot(n-1)\}}{1+2+\cdots+n}$$

$$=a+\frac{2d\left\{\boxed{(가)}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$$=a+\boxed{(나)}\cdot(n-1)$$

이므로 $\{b_n\}$은 공차가 $\boxed{(나)}$인 등차수열이다.

역으로 $\{b_n\}$을 등차수열이라 하면,

$$b_{n+1}=\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}+\frac{(n+1)a_{n+1}}{1+2+\cdots+(n+1)}$$

$$=\boxed{(다)}\cdot b_n+\frac{2}{n+2}a_{n+1}$$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
②	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n-1}{n+2}$
③	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n}{n+2}$
④	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{n}{n+2}$
⑤	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$	$\frac{3}{2}d$	$\frac{n+1}{n+2}$

단답형

18. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100}의 값을 구하시오. [3점]

19. $(3x+y)^6$의 전개식에서 x^2y^4의 계수를 구하시오. [3점]

20. 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(0, 5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하시오. [3점]

21. 함수 $f(x)=1+3\log_2 x$에 대하여 함수 $g(x)$가 $(g \circ f)(x)=x$를 만족시킬 때, $g(13)$의 값을 구하시오. [3점]

22. 행렬 $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\log a^3$의 가수와 $\log b^5$의 가수가 모두 0이 되도록 하는 양의 실수 a, b ($1<a<10$, $1<b<10$)에 대하여 ab의 최대값이 $10^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

24. 8종류의 과자 A, B, C, D, E, F, G, H로 다음 조건에 따라 세트 상품을 만들려고 한다.

(가) 각 세트에는 서로 다른 4종류의 과자를 각각 한 개씩 담는다.
(나) A 또는 B를 담는 경우에는 A와 B를 같은 세트에 담는다.
(다) A, B, C 모두를 같은 세트에 담지 않는다.

서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]

25. 어느 작업장에 먼지의 양이 $1\,\mathrm{m}^3$당 $200\,\mu\mathrm{g}$ ($1\,\mu\mathrm{g}=10^{-6}\,\mathrm{g}$)이 되면 자동으로 가동되기 시작하는 먼지 제거 장치가 있다. 이 장치가 가동되기 시작하고 t초 후 $1\,\mathrm{m}^3$당 먼지의 양 $x(t)$는

$$x(t)=20+180\times 3^{-\frac{t}{256}}\ (\mu\mathrm{g}/\mathrm{m}^3)$$

이라 한다. 먼지 제거 장치가 가동되기 시작하고 n초 후 작업장의 $1\,\mathrm{m}^3$당 먼지의 양이 $50\,\mu\mathrm{g}$이 되었다고 할 때, n의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$로 계산한다.) [4점]

5지선다형

26. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1$$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n & (a_n\geq 2)\\ \sqrt[3]{2}\,a_n & (a_n<2)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112}의 값은? [3점]

① 1　② $\sqrt[3]{2}$　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt[3]{4}$　⑤ 2

27. 공비가 1이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_{n+1} & b_n \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않는다고 하자. 수열 $\{a_n\}$이 발산할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값과 같은 것은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 a_n, b_n은 양수이다.) [4점]

① $\frac{a_1b_1}{a_2-a_1}$ ② $\frac{a_2b_1}{a_2-a_1}$ ③ $\frac{a_1b_2}{a_2-a_1}$
④ $\frac{a_1b_1}{a_1-a_2}$ ⑤ $\frac{a_1b_2}{a_1-a_2}$

28. 두 무한등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 수렴한다.

ㄴ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) \neq 0$이다.

ㄷ. 두 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

29. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB-BA=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면 $ps-qr=0$이다.

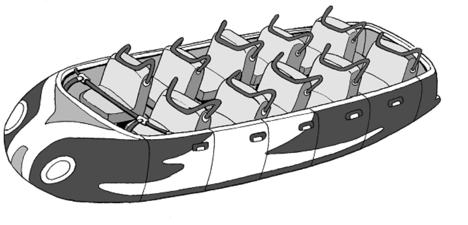
ㄴ. 모든 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $p+s=0$이다.

ㄷ. 행렬 $AB-BA$가 영행렬이면 B는 A의 역행렬이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

30. 남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2개의 의자가 있고 모두 5줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉을 때, 4명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.