2007학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 (수리영역-가형) 정답 및 해설

1.

(주어진 식) $=\left(3\cdot 3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}=\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}=3^1=3$

답 ③

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$에서

$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ A+2A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

답 ⑤

3. 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$ 이어야 한다.

$f(2)=2^2+2+a=6+a$

$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}(x+b)=2+b$

에서 $6+a=2+b$

$\therefore\ a-b=2-6=-4$

답 ①

4. 두 함수 $f(x)=x^4-4x+a$ 와

$g(x)=-x^2+2x-a$ 를 연립하여 정리하면

$x^4+x^2-6x+2a=0$

$h(x)=x^4+x^2-6x+2a$ 라 하면

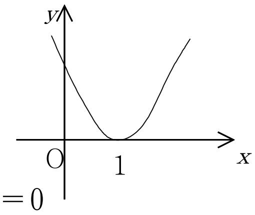
$h'(x)=4x^3+2x-6$

$=(x-1)(x^2+4x+6)$

이므로 $x=1$ 에서 $h(x)$ 의 극소값만 존재한다.

그런데 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프 의 교점이 한 개이므로 $h(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나야 한다.



따라서 $h(1)=0$

$h(1)=1+1-6+2a=0$

$\therefore\ a=2$

답 ②

5. $x^3+(a+1)x^2+2ax+a$

$=(x+1)(x^2+ax+a)<0$

해가 $x<-1$ 이기 위해서는 모든 실수 x 에 대하여 항상 $x^2+ax+a\geq 0$ 이어야한다.

따라서 판별식 $D\leq 0$

$D=a^2-4a=a(a-4)\leq 0$

$0\leq a\leq 4$

$\therefore$ (a 의 최소값) = 0

답 ④

6. $g(x)+h(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ 0 & (0<x\leq 1) \\ 0 & (1<x\leq 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$

$g(x)h(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ -1 & (0<x\leq 1) \\ 0 & (1<x\leq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$

$|h(x)|=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ 1 & (0<x\leq 1) \\ 0 & (1<x\leq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$

$a_1=N(g+h)=1,\ \ a_2=N(gh)=3$

$a_3=N(|h|)=3$

$\therefore\ a_1<a_2=a_3$

답 ②

7. ㄱ. $\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{2}x-1\right) = -1$

(거짓)

ㄴ. $f(0)=a$ $(a>3)$ 이라 하면

$g(f(0))=g(a)$

$g(x)$ 는 $x>3$ 에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} g(f(x)) = \lim_{k\to a} g(k) = g(a)$

따라서 $\lim_{x\to0} g(f(x)) = g(f(0))$ 이므로

함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(참)

ㄷ. $h(x)=g(f(x))$ 라고 하면

$h(-3)=g(f(-3))=g(1)=-\frac{1}{2}$

$h(3)=g(f(3))=g(3)=\frac{1}{2}$

$h(-3)h(3)<0$ 이므로 $h(x)$ 의 그래프는 폐구간 [-3, 3]에서 x 축과 적어도 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $g(f(x))=0$ 은 폐구간 [-3, 3]에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

답 ④

8. 수조에 가득 채워진 물의 양을 1이라고 하면 단위 시간당 급수하는 물의 양은 $\frac{1}{45}$

한편 물을 빼내어 수조의 물의 양이 전체 용량의 $\frac{1}{2}$ 이 되는데 걸리는 시간을 t 분이라 하면 단위 시간당 빼내는 물의 양은 $\frac{1}{2t}$

따라서 90분 중 t 분 동안 $\frac{1}{2}$ 의 물을 빼내고 90-t 분 동안 물을 빼내면서 동시에 급수를 하여 수조에 물을 가득 채웠으므로

$\frac{1}{2}+(90-t)\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{2t}\right)=1$

$(90-t)\frac{2t-45}{90t}=\frac{1}{2}$

$(90-t)(2t-45)=45t$

$2t^2-180t+4050=0$

$(t-45)^2=0,\quad t=45$

따라서 전체의 물을 모두 빼내는데 걸리는 시간은 $2t=90$ (분) 이므로 1시간 30분이다.

답 ④

9. ㄱ. (반례)

$f(x)=x^2+2x$ 라 하면 $f(0)=0$

$f'(x)=2x+2$ 이므로 $f'(0)=2\neq0$

(거짓)

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여

$g(x)=g(-x)$ 이므로 $g(x)$ 는 우함수

따라서 $g'(x)$ 는 기함수이고

모든 기함수의 그래프는 원점에 대칭이므로 반드시 원점을 지난다.

$\therefore g'(0)=0$ (참)

ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여

$0\le|h(2x)-h(x)|\le x^2$ 이므로 양변을 $|x|$로 나누면

$0\le\left|\frac{h(2x)-h(x)}{x}\right|\le\frac{x^2}{|x|}$

$0\le\lim_{x\to0}\left|\frac{h(2x)-h(0)}{2x-0}\cdot2-\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right|\le\lim_{x\to0}\frac{x^2}{|x|}$

$0\le|2h'(0)-h'(0)|\le0$

$0\le h'(0)\le0$

$\therefore h'(0)=0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

답 ⑤

10. (나)에서 $f_1{}'(0)=\lim_{x\to0}\dfrac{f_1(x)+2kx}{f_1(x)+kx}$

$$=\lim_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f_1(x)}{x}+2k}{\dfrac{f_1(x)}{x}+k}$$

$f_1{}'(0)=\lim_{x\to0}\dfrac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}$ 이므로

$f'_1(0)=\dfrac{f'_1(0)+2k}{f'_1(0)+k}$

$f'_1(0)=a$ (a 는 실수) 라 하면

$a=\dfrac{a+2k}{a+k}$, $a+2k=a^2+ak$ --㉠

같은 방법으로 $f'_2(0)=b$ 라 하면

$b=\dfrac{b+2k}{b+k}$, $b+2k=b^2+bk$ --㉡

㉠ - ㉡에서

$a-b=(a-b)(a+b+k)$

(다)에서 $ab=-1$ 이므로 $a\neq b$

$\therefore a+b=1-k$ ------------ ㉢

또한

$ab=\dfrac{a+2k}{a+k}\cdot\dfrac{b+2k}{b+k}=-1$

$5k^2+3(a+b)k-2=0$

위의 식에 ㉢을 대입하여 정리하면

$2k^2+3k-2=(2k-1)(k+2)=0$

$k=\dfrac{1}{2}$, -2

그런데 $k=-2$ 이면 a, b 는 실수가 아니다.

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

답 ①

11. $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{6}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$

답 ⑤

12. $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$의 양변에 A^2을 곱하면

$A^2A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A^2A^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\ A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=-A^3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$=E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ($\because A^3+E=O$)

$=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=1,\quad b=1$

$\therefore\ a+b=2$

답 ②

13. ㄱ. 10과 99는 모두 두 자리의 자연수이므로 $\log 10$, $\log 99$ 의 지표는 1로 같다.

$\therefore\ A_{10}=\{10, 11, 12, \cdots, 99\}=A_{99}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $n(A_{10})=90$ 이다.

한편, 100은 세 자리의 자연수이므로

$A_{100}=\{100, 101, 102, \cdots, 999\}$

$\therefore\ n(A_{100})=900$

$\therefore\ n(A_{100})=10\cdot n(A_{10})$ (참)

ㄷ. $A_p\cap A_q\neq\phi$ 이므로 $r\in A_p\cap A_q$라 하면 $r\in A_p$이고 $r\in A_q$이다.

따라서 ($\log r$ 의 지표) =($\log p$의 지표)이고

($\log r$ 의 지표) =($\log q$의 지표)이므로

($\log p$의 지표) =($\log q$의 지표)이다.

$\therefore\ A_p=A_q$ (참)

답 ⑤

14. 첫째 해의 연봉 : a 원

2년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)$원

3년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)^2$원

…

19년째 해의 연봉 : $a(1+0.08)^{18}$원

20년째 해의 연봉 : $\frac{2}{3}a(1+0.08)^{18}$

따라서 이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은

$$a+a\times1.08+a\times1.08^2+a\times1.08^3$$
$$+\cdots+a\times1.08^{17}+a\times1.08^{18}$$
$$+\frac{2}{3}a\times1.08^{18}\times9$$
$$=a+\frac{a\times1.08(1.08^{18}-1)}{1.08-1}+6a\times1.08^{18}$$
$$=a+\frac{a\times1.08(4-1)}{0.08}+6a\times4$$
$$=25a+\frac{81}{2}a$$
$$=\frac{131}{2}a$$

답 ④

15. 12명을 4명씩 A, B, C의 세 조로 나눈다고 하자.

각 지역에서 선발된 3명을 세 조에 한 명씩 배치하는 경우의 수는 각각 $3!=6$이므로 4지역의 12명을 모두 배치하는 경우의 수는 6^4이다.

그런데, 세 조 A, B, C는 서로 구별되지 않으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6^4}{3!}=6^3=216$$

답 ③

16. $I_1=\frac{a}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}a$

$$I_{n+1}=\frac{I_n}{\cos30^\circ}$$

$$\therefore\ \frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{1}{\cos30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

따라서 수열 $\{I_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{\sqrt{3}}a$이고 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$인 등비수열이므로

$$I_n=\frac{2}{\sqrt{3}}a\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$$
$$=a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{I_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$
$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{a}=\sqrt{3}$$

$\therefore\ a=2+\sqrt{3}$

답 ③

17. $2+3\cdot2+\cdots+n(n-1)$

$$=2(2-1)+3(3-1)+\cdots+n(n-1)$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2-(1+2+3+\cdots+n)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$\therefore$ (가) $=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\frac{2d\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$= 2d\left\{ \dfrac{2n+1}{6} - \dfrac{1}{2} \right\}$

$= \dfrac{2d(2n+1-3)}{6} = \dfrac{2}{3}d(n-1)$

$\therefore$ (나) $= \dfrac{2}{3}d$

$\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}$

$= \dfrac{1+2+\cdots+n}{1+2+\cdots+(n+1)} \cdot \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$

$= \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot b_n$

$= \dfrac{n}{n+2} \cdot b_n$

$\therefore$ (다) $= \dfrac{n}{n+2}$

답 ①

[참고]
주어진 증명을 완성하면 다음과 같다.

$b_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}b_n + \dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$

$= \left(1 - \dfrac{2}{n+2}\right)b_n + \dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$

$= b_n - \dfrac{2}{n+2}b_n + \dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$

$\therefore \ b_{n+1} - b_n = \dfrac{2}{n+2}(a_{n+1} - b_n)$ ⋯ ㉠

그런데, 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 a', 공차를 d'이라 하면 $b_{n+1} - b_n = d'$이므로 ㉠에서

$d' = \dfrac{2}{n+2}(a_{n+1} - b_n)$

$\therefore \ a_{n+1} = \dfrac{d'}{2}(n+2) + b_n$

$= \dfrac{d'}{2}(n+2) + a' + (n-1)d'$

$= \left(a' + \dfrac{3}{2}d'\right) + \dfrac{3}{2}d'(n-1)$

따라서 수열 $\{a_{n+1}\}$은 $a_2 = a' + \dfrac{3}{2}d'$이고 공차가 $\dfrac{3}{2}d'$인 등차수열이다.

그런데, $a_1 = b_1 = a'$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a', 공차가 $\dfrac{3}{2}d'$인 등차수열이다.

18. $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b$ 에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

$f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ 이므로

$f(1) = 1 + a + 9 + b = 0$

$f'(1) = 3 + 2a + 9 = 0$

위의 두 식에서 $a = -6$, $b = -4$

$\therefore \ ab = 24$

답 24

19. $x^2 - 12x + 3 = t$라 하면 주어진 방정식은

$t - 3 + \sqrt{t} = 3$

$\sqrt{t} = 6 - t$ ⋯㉠

양변을 제곱하면 $t = 36 - 12t + t^2$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$(t-4)(t-9) = 0$

㉠에서 $0 \le t \le 6$이므로 $t = 4$

$x^2 - 12x + 3 = 4$에서

$x^2 - 12x - 1 = 0$

따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
구하는 모든 근의 합은 12이다.

답 12

20. 9개의 정사각형 중 3개를 택하여 색칠하는 경우의 수는

$_9C_3=84$ (가지)

유형1의 모양으로 색칠하는 경우의 수는

6 (가지)

유형2의 모양으로 색칠하는 경우의 수는

$4\times4=16$ (가지)

유형3의 모양으로 색칠하는 경우의 수는

$84-(6+16)=62$ (가지)

이므로 $P(X=1)=\frac{6}{84}=\frac{3}{42}$,

$P(X=2)=\frac{16}{84}=\frac{4}{21}$,

$P(X=3)=\frac{62}{84}=\frac{31}{42}$

$\therefore\ E(X)=1\times\frac{3}{42}+2\times\frac{4}{21}+3\times\frac{31}{42}=\frac{56}{21}$

$\therefore\ E(42X)=42E(X)=42\times\frac{56}{21}=112$

답 112

21. $|x|>1$ 일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=2x^2$$

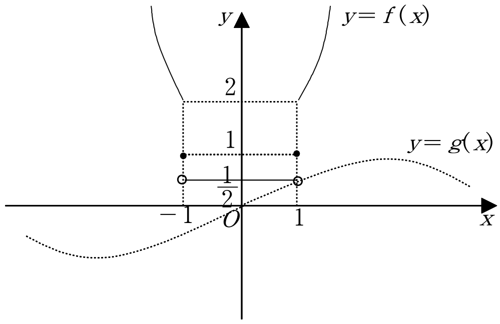
$x=1$ 일 때, $f(1)=\frac{2+1}{1+2}=1$

$x=-1$ 일 때, $f(-1)=\frac{2+1}{1+2}=1$

$|x|<1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+2}=0$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

따라서, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않으려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않아야 한다.

$y=f(x)$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$g(x)=\sin(k\pi x)$에서 $k>0$ 으로 가정하여도 일반성을 잃지 않는다.

따라서, $g(1)\le\frac{1}{2}$ 이고,

$g(x)$의 주기는 4보다 커야 한다.

$g(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{k\pi}=\frac{2}{k}$ 이므로

$\frac{2}{k}>4$ 에서 $0<k<\frac{1}{2}$ …㉠

$g(1)=\frac{1}{2}$ 에서 $\sin k\pi=\frac{1}{2}$

$\therefore\ k=\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\cdots$

㉠에 의해 $k=\frac{1}{6}$

따라서, k의 최대값이 $\frac{1}{6}$ 이므로 $60k$의 최대값은 10이다.

답 10

22. $\frac{x(x-n)}{(x-1)(x+n-1)}\le0$

$\Leftrightarrow\ x(x-n)(x-1)(x+n-1)\le0$,

$x\ne1,\ x\ne1-n$

(ⅰ) $n=1$ 일 때,

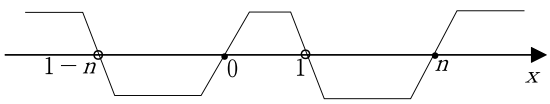
$x(x-1)(x-1)x\le0$ 에서 $x^2(x-1)^2\le0$

$x \neq 1$ 이므로 $x=0$

즉, 주어진 부등식을 만족하는 정수 x의 값은 한 개이므로 부적절하다.

(ii) $n \neq 1$ 일 때,

$x(x-n)(x-1)(x+n-1) \le 0$ 에서



$1-n < x \le 0$, $1 < x \le n$

이므로 정수 x의 개수는

$(n-1)+(n-1)=2n-2$ (개)

따라서, $2n-2=100$ 에서 $n=51$

답 51

23. $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ 에서

$x=0, y=0$ 을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$=2x+f'(0) \quad \cdots ㉠$$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$ 에서

$x\to 1$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

$\therefore f(1)=f'(1)$

㉠에서 $f'(1)=2+f'(0)$ 이므로

$f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)-1$$

$$=14$$

$\therefore f'(1)=30$

$\therefore f'(0)=f'(1)-2=28$

답 28

[다른풀이]

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ 에서

$x=0, y=0$ 을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1 \quad \therefore f(0)=1$

$f'(0)=k$라 하면

$$k=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=2x+\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$=2x+k$$

$$\therefore f(x)=\int(2x+k)\,dx=x^2+kx+C$$

(C는 상수)

$f(0)=1$ 이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=x^2+kx+1$

따라서, $f'(x)=2x+k$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+kx+1-2x-k}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2+k(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+k}{x+1}$$

$$=\frac{k}{2}$$

$= 14$

$\therefore \ k=28$

24. (i) A, B를 포함하는 세트의 개수

C를 제외한 5개의 과자에서 2개를 택하는 방법의 수이므로

${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ (가지)

(ii) A, B를 포함하지 않는 세트의 개수

A, B를 제외한 6개의 과자에서 4개를 택하는 방법의 수이므로

${}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\times5}{2\times1} = 15$ (가지)

따라서 (i), (ii)에 의해 서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수는

$10 + 15 = 25$ (가지)

답 25

25. $50 = 20 + 180\times3^{-\frac{n}{256}}$ 이므로 $3^{-\frac{n}{256}} = \dfrac{1}{6}$

양변에 상용로그를 취하면

$-\dfrac{n}{256}\log 3 = \log\dfrac{1}{6} = -\log 2 - \log 3$

$\therefore \ n = \dfrac{256(\log 2 + \log 3)}{\log 3}$

$= \dfrac{256\times0.78}{0.48} = 416$

답 416

[미분과 적분]

26. $3(1-2\sin^2\theta)+4\sqrt{2}\sin\theta-3=0$

$6\sin^2\theta-4\sqrt{2}\sin\theta=0$

$\sin\theta(6\sin\theta-4\sqrt{2})=0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\theta\neq0$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta>0$ 이므로

$\cos\theta=\frac{1}{3}$

답 ①

27. $y=\sin x-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin x-\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$x-\frac{\pi}{3}=\theta$라 하면

$0\le x\le\pi$ 이므로 $-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{2}{3}\pi$ 이다.

따라서, 함수 $y=\sin\theta$ 에서

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 일 때 y의 최대값은 1이고,

$\theta=-\frac{\pi}{3}$ 일 때 y의 최소값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$\therefore\ M-m=1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

28.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$$

이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{1}{1}=1$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+x}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}+1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$=\frac{1+1}{1}=2$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=1$ 에서 $x\to0$ 일 때,

(분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)=0$

$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}\cdot f(x)$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to0}f(x)$

$=1\cdot0=0$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

29. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 일 때,

$$f(\theta)=\frac{1}{2}(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\right)$$ 이므로

$$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta}$$

$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$$f(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta-\cos\theta)\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ 이므로

$$\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\right)(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\theta\right)}{\left(\frac{1}{2}-\sin^2\theta\right)(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\sqrt{2}+2\sin\theta)}{(1-2\sin^2\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2\theta(\sqrt{2}+2\sin\theta)}{\cos2\theta(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}+2\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$$

답 ②

30. $b>0$ 이므로 $\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln2}\neq0$ 이고, $x\to0$ 일 때, (분자)$\to0$ 이므로 (분모)$\to0$ 이어야 한다.

따라서, $\lim_{x\to0}(2^{x+1}-a)=0$ 에서 $2-a=0$

$\therefore\ a=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin7x}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin7x}{x}}{\frac{2^{x+1}-2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin7x}{7x}\cdot7}{\frac{2(2^x-1)}{x}}$$

$$=\frac{1\cdot7}{2\cdot\ln2}=\frac{7}{2\ln2}$$

$\therefore\ b=7$

$\therefore\ ab=14$

답 14

[확률과 통계]

26. 주어진 히스토그램으로부터 누적도수의 분포표를 만들면 다음과 같다.

계급	도수	누적도수
0 ~ 10	2	2
10 ~ 20	4	6
20 ~ 30	6	12
30 ~ 40	8	20
40 ~ 50	10	30
50 ~ 60	12	42
60 ~ 70	10	52
70 ~ 80	8	60
80 ~ 90	6	66
90 ~ 100	4	70
100 ~ 110	2	72
계	72	

따라서, 누적상대도수의 그래프의 개형은 ① 과 같다.

답 ①

27. 9개의 자료의 평균 m이

$$\frac{31}{3} < m < 11$$

이므로 9개의 자료의 총합은

$$93 < 9m < 99 \quad \cdots ㉠$$

이다. 10개의 자료의 총합은

$$\sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110$$

이므로 $9m = 110 - x$이고, ㉠에서

$$93 < 110 - x < 99$$

$\therefore \ 11 < x < 17$

따라서, x의 값은 12 또는 14 또는 16이므로 구하는 합은 42이다.

답 ③

28. A또는 B가 반장으로 뽑히는 사건을 E, C가 부반장으로 뽑히는 사건을 F라고 하면

구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|E)$이다.

$$\mathrm{P}(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(E \cap F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \ \mathrm{P}(F|E) = \frac{\mathrm{P}(E \cap F)}{\mathrm{P}(E)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

답 ②

29. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) \leq 1$ 이다.

(ⅰ) $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{5}$ 이면 $\frac{1}{5} < \mathrm{P}(A) \leq 1$ 에서

$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{5}$ 또는 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5}$ 또는 $\mathrm{P}(A) = \frac{4}{5}$

이므로 A, B를 선택하는 경우의 수는

$$_5C_1 \times ({}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_4C_4) = 5(6+4+1)$$
$$= 55 \text{ (가지)}$$

(ⅱ) $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{5}$ 이면 $\frac{2}{5} < \mathrm{P}(A) \leq 1$ 에서

$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5}$ 이므로 두 사건 A, B를 선택하는 경우의 수는

$$_5C_2 \times {}_3C_3 = 10 \times 1 = 10 \text{ (가지)}$$

따라서, 구하는 모든 경우의 수는

$55+10=65$ (가지)

답 ⑤

30. 10개의 자료 y_1, y_2, $\cdots$, y_{10}의 평균 m_y는

$$m_y=\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10}=\frac{10}{10}=1$$

이므로 y_1, y_2, $\cdots$, y_{10}의 분산 $\sigma_y{}^2$은

$$\sigma_y{}^2=\frac{\sum_{i=1}^{10} y_i{}^2}{10}-1^2=\frac{68}{10}-1=5.8$$

$y_i=\frac{1}{10}x_i-5$ 에서 $x_i=10y_i+50$ 이므로

$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$의 분산 $\sigma_x{}^2$은

$$\sigma_x{}^2=100\sigma_y{}^2=100\times 5.8=580$$

답 580

[이산수학]

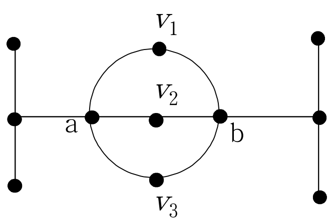
26. $A \to B \to C \to D : 3 \times 2 \times 1 = 6$

$A \to C \to D : 2 \times 1 = 2$

따라서 지점 A에서 지점 D까지 가는 방법의 수는 8가지이다.

답 ③

27.

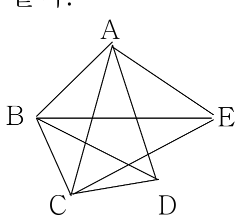


위의 그래프에서 꼭지점 a와 b를 변으로 연결하고 나머지 꼭지점 v_1, v_2, v_3 을 a 또는 b와 연결하면 생성수형도를 만들 수 있다. 따라서 구하는 생성수형도의 개수는

$3 \times 2 \times 2 = 12$

답 ①

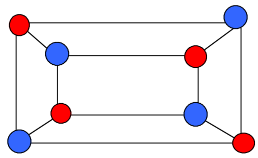
28. ⑤ 의 인접행렬을 그래프로 나타내면 다음과 같다.



위의 그래프에서 AEBDCA 는 해밀턴회로이다.

답 ⑤

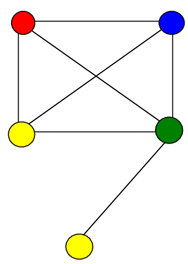
29. ㄱ. (반례)



오른쪽 그래프는 최소 색의 수가 2이지만 수형도가 아니다. (거짓)

ㄴ. 회로를 하나도 갖지 않는 그래프는 최소 색의 수가 2인 경우가 있으므로 최소 색의 수가 3인 가정에 모순이다. 따라서 한 개 이상의 회로를 갖는다. (참)

ㄷ. (반례)



오른쪽 그래프는 최소 색의 수가 4 이지만 회로가 지나지 않는 점이 존재한다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

30. 컴퓨터 C_1 과 C_2 가 연결되는 포트 사이에는 1개 이상의 포트가 비어 있어야 하고 컴퓨터 C_2 와 C_3 이 연결되는 포트 사이에는 2개 이상의 포트가 비어 있어야 한다.

따라서 연결되는 포트의 순서에는

$C_2 > C_1 + 1$, $C_3 > C_2 + 2 > C_1 + 3$

인 관계가 있고 $C_3 \le 8$ 이므로

$1 \le C_1 < C_2 < C_3 \le 5$

따라서 구하는 경우의 수는 1부터 5까지의 자연수에서 3개를 뽑아 크기 순서로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \text{ (가지)}$$

답 10