

5. 이차방정식 $x^2 - 5x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \beta & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 A^5 과 같은 행렬은? [3점]

- ① $6A$
- ② $9A$
- ③ $25A$
- ④ $27A$
- ⑤ $81A$

6. 양의 실수 a, b 에 대하여 연산 \odot 를 $a \odot b = a^{2b}$ 이라 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

<보기>

ㄱ. $a \odot 1 = 1 \odot a$
 ㄴ. $\frac{1}{a} \odot b = \frac{1}{a \odot b}$
 ㄷ. $a \odot \left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}(a \odot b)$

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. $\sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt[3]{2}}, (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 의 대소 관계는? [3점]

- ① $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt[3]{2}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
- ② $\sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt[3]{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$
- ③ $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}}$
- ④ $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} < (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}}$
- ⑤ $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt[3]{2}}$

8. 이차 정사각행렬 A, B 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬이다.) [3점]

<보기>

ㄱ. $A + B = E$ 이면 $A^2 - B^2 = A - B$ 이다.
 ㄴ. $A^2 = 2A$ 이면 $A = O$ 또는 $A = 2E$ 이다.
 ㄷ. $AB = A$ 이고 $BA = B$ 이면 $AB = BA$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. $\log_{10} 1.23 = \alpha$ 일 때, $\sum_{k=1}^9 (-1)^{k-1} \log_{10} (123 \times 10^{k-1})$ 의 값은? [3점]

- ① $2 + \alpha$
- ② $3 - \alpha$
- ③ $4 + \alpha$
- ④ $5 - \alpha$
- ⑤ $6 + \alpha$

10. 다음 세 수에 대한 상용로그의 지표의 합과 가수 합을 차례대로 나열한 것은? [4점]

0.02, 200, 2500

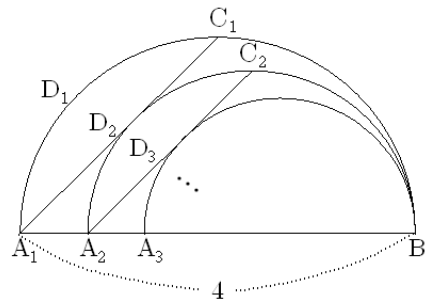
- ① 3, $\log_{10} 2$
- ② 3, $\log_{10} 6.5$
- ③ 3, 1
- ④ 4, 0
- ⑤ 4, $\log_{10} 6.5$

11. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B 를 지름으로 하는 반원 D_1 이 있다.

호 A_1B 를 이등분하는 점을 C_1 , 점 B 를 지나면서 선분 A_1C_1 과 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_2 , 반원 D_2 가 선분 A_1B 와 만나는 점을 A_2 라 하자.

호 A_2B 를 이등분하는 점을 C_2 , 점 B 를 지나면서 선분 A_2C_2 와 접하고 중심이 선분 A_1B 위에 있는 반원을 D_3 , 반원 D_3 이 선분 A_1B 와 만나는 점을 A_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n 의 호의 길이를 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]



- ① $2(1 + \sqrt{2})\pi$
- ② $2(2 + \sqrt{2})\pi$
- ③ $2(3 + \sqrt{2})\pi$
- ④ $2(2 + 2\sqrt{2})\pi$
- ⑤ $2(3 + 2\sqrt{2})\pi$

12. $a_1=1, 2a_{n+1}+a_n=2$ (단, $n=1, 2, 3, \dots$)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

< 보 기 >

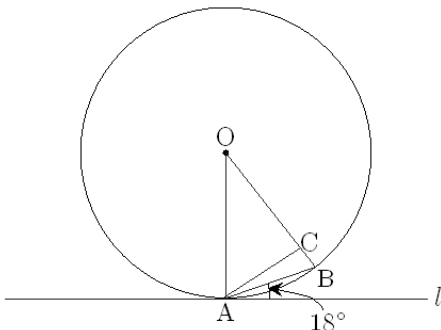
ㄱ. 수열 $\{a_n - \frac{2}{3}\}$ 는 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

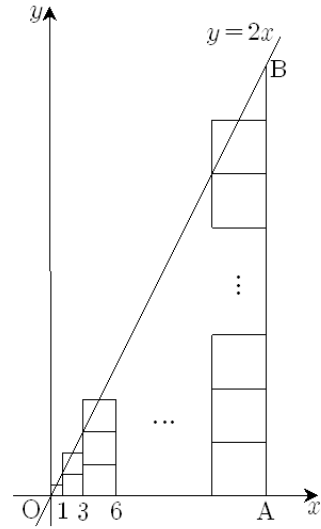
13. 원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18° 이다. 선분 OB 위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는? [4점]



- ① 68°
- ② 72°
- ③ 76°
- ④ 80°
- ⑤ 84°

14. 그림은 직선 $y=2x$ 와 한 변의 길이가 1인 정사각형 1개, 한 변의 길이가 2인 정사각형 2개, ..., 한 변의 길이가 n인 정사각형 n개를 나타낸 것이다.

원점으로부터의 거리가 $1+2+3+\dots+n$ 인 x축 위의 점 A를 지나고 y축에 평행인 직선이 $y=2x$ 와 만나는 점을 B라 하자.



다음은 이를 이용하여 어떤 수열의 합을 구하는 과정이다.

모든 정사각형들의 넓이의 합은 직각삼각형 OAB의 넓이와 같으므로,

(가) $\square = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{AB}$ 이다.

$\overline{OA} = 1+2+3+\dots+n$ 이고 $\overline{AB} = \square$ (나) 이다.

따라서, (가) $\square = \square$ (다) 이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$	n^2	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
②	$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$	$n(n+1)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
③	$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$	$n(n+1)$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
④	$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$	$n(n+1)$	$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$
⑤	$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$	n^2	$\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

15. 다음은 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3 + 5 &= 2^3 \\ 7 + 9 + 11 &= 3^3 \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 4^3 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n (2i + n^2 - n - 1) &= n^3 \end{aligned}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

i) $n = 1$ 일 때, $2 \cdot 1 + 1^2 - 1 - 1 = 1^3$ 이므로 성립한다.

ii) $n = k$ 일 때 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^k (2i + k^2 - k - 1) = k^3 \text{ 이다.}$$

$n = k + 1$ 일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k+1} \boxed{\text{(가)}} \\ &= \sum_{i=1}^k (2i + k^2 - k - 1) + \sum_{i=1}^k 2k + \boxed{\text{(나)}} \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

그러므로 $n = k + 1$ 일 때도 성립한다.

i), ii)에 의해서 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [4점]

(가) (나)

- ① $2i + k^2 + k - 1$ $k^2 + 3k + 1$
- ② $2i + k^2 + k - 1$ $k^2 - 3k + 1$
- ③ $2i + k^2 + k + 1$ $k^2 + 3k + 1$
- ④ $2i + k^2 - k + 1$ $k^2 - 3k + 1$
- ⑤ $2i + k^2 - k + 1$ $k^2 + 3k + 1$

16. x, y 가 각각 2자리, 3자리의 자연수일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

< 보 기 >

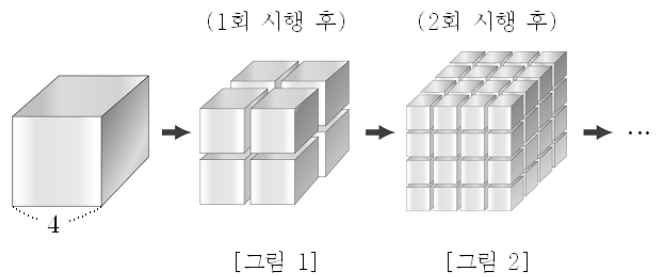
- ㄱ. xy 는 4자리 또는 5자리의 자연수이다.
- ㄴ. $y = 10x$ 이면 $\log_{10}x$ 와 $\log_{10}y$ 의 가수는 같다.
- ㄷ. $\frac{1}{x}$ 은 소수 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 수가 나타난다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다.

[그림 1]은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.

[그림 2]는 [그림 1]의 정육면체들의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.



이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체들의 겹넓이의 합은? [4점]

- ① 3×2^{10}
- ② 3×2^{12}
- ③ 3×2^{15}
- ④ 3×2^{17}
- ⑤ 3×2^{20}

단답형

18. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 8$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 10$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k + 3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 두 이차 정사각행렬 A, B 가

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}, 2A + B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \text{을 만족시킬 때,}$$

행렬 A 의 $(2, 1)$ 성분과 행렬 B 의 $(2, 2)$ 성분의 합을 구하시오.

[3점]

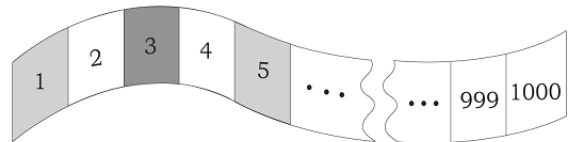
20. 자연수 a, b, c 에 대하여 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하지 않고,

$$1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{7}}} = \frac{178}{121} \text{을 만족시킬 때, } A^2 \text{의 모든 성분의 합을}$$

구하시오. [3점]

21. 정수 a, b 에 대하여 $2^a \times 3^b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 그림과 같이 1부터 1000까지의 자연수가 쓰여진 흰색 종이 띠에 1부터 시작하여 공차가 4인 등차수열의 수가 있는 부분에는 빨간색, 3부터 시작하여 공비가 3인 등비수열의 수가 있는 부분에는 파란색을 칠하였다. 빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해진 부분에 쓰여진 수 중에서 가장 큰 수를 구하시오. [4점]

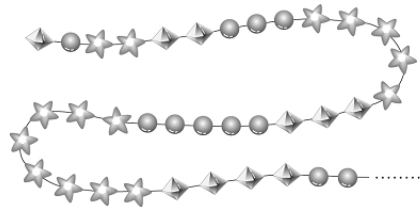


23. 연립방정식 $\begin{pmatrix} a & 8 \\ 4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 가질 때, $a+2b$ 의 최소값을 구하시오. (단, a, b 는 양수이다.) [3점]

24. 이차 정사각행렬 A 의 (i, j) 성분 a_{ij} 가 $a_{ij} = (i+2j)$ 의 양의 약수의 개수일 때, 행렬 A 의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, $i=1, 2, j=1, 2$) [4점]

25. 어떤 학생이 계발활동 시간에 목걸이를 만들려고 한다. 그림과 같이 세 종류의 인조 보석 $\blacklozenge, \bullet, \star$ 을 사용하여 처음에는 \blacklozenge 1개, \bullet 1개, \star 2개를 꿰고 난 뒤, 다음 규칙을 순서대로 반복한다.

- I. \blacklozenge 는 바로 전 단계에 꿰 \blacklozenge 의 개수보다 1개 더 많이 꿰다.
- II. \bullet 는 바로 전 단계에 꿰 \bullet 의 개수보다 2개 더 많이 꿰다.
- III. \star 는 I과 II에서 꿰 \blacklozenge 과 \bullet 의 개수를 더한 만큼 꿰다.



인조 보석 200개를 사용하여 목걸이를 만들었을 때, 목걸이에 있는 \bullet 의 개수를 구하시오. [4점]

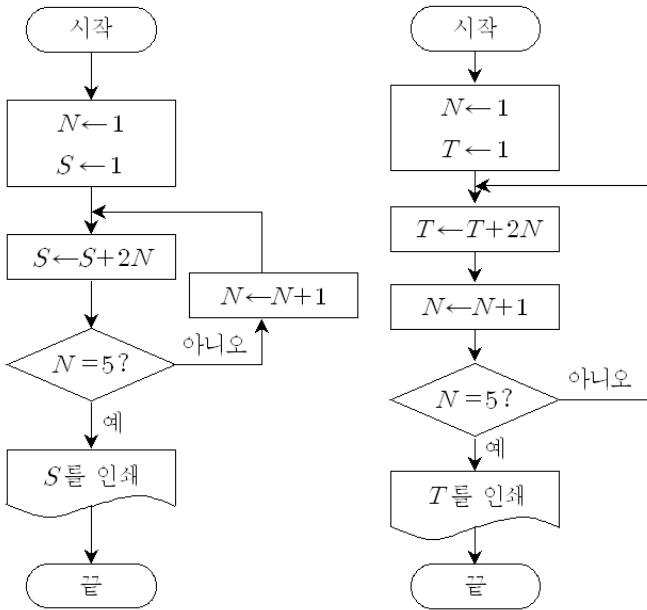
5 지 선 다 형

26. 실수 a, b 에 대하여 $|a-1|+|b-2|=0$ 일 때, 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 의 역행렬은? [3점]

- ① $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- ② $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- ③ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- ④ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- ⑤ $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

27. 두 순서도에서 인쇄되는 S 와 T 에 대하여 $S - T$ 의 값은?

[4점]



- ① -12
- ② -10
- ③ 0
- ④ 10
- ⑤ 12

28. $A^2 - 3A + E = A - 2E$ 를 만족시키는 행렬 A 의 역행렬은?
(단, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- ① $-3(A - 4E)$
- ② $-\frac{1}{3}(A - 4E)$
- ③ $\frac{1}{4}(A - 4E)$
- ④ $\frac{1}{3}(A + 4E)$
- ⑤ $3(A + 4E)$

29. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 무한급수

$$\left(a_1 - \frac{2}{1^2}\right) + \left(a_2 - \frac{2+4}{3^2}\right) + \dots + \left(a_n - \frac{2+4+6+\dots+2n}{(2n-1)^2}\right) + \dots$$

이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 0
- ② $\frac{1}{6}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{2}$
- ⑤ 1

단답형

30. 무한등비급수 $\cos^2\theta + \cos^2\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + \dots$ 의 합이

$$\frac{18}{13}$$
 일 때, $\frac{10}{\tan\theta}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

※ 확인사항

○ 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.