2007 대학수학능력시험 대비

2006학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	2	①	3	④	4	①	5	②
6	②	7	③	8	⑤	9	③	10	②
11	④	12	②	13	④	14	①	15	③
16	③	17	①	18	90	19	380	20	13
21	22	22	16	23	10	24	241	25	84
26	①	27	⑤	28	⑤	29	⑤	30	10

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{8} = \left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{6}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{3}{6}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2$$

2. [출제의도] 조건부확률을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\mathrm{P}(A|B) - \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} - \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$= \mathrm{P}(A\cap B)\left(\frac{1}{\mathrm{P}(B)} - \frac{1}{\mathrm{P}(A)}\right) = \frac{3}{20}\times\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{50}$$

3. [출제의도] 확률분포표에서 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{6}=1$ 에서 $a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

4. [출제의도] 행렬의 연산과 곱셈공식을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$에서 $x+y=6,\ xy=7$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\times 7=22$

5. [출제의도] 로그함수에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{AH}}=a-1$, $\overline{\mathrm{PH}}=\log_2 a$ 이고, $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{PH}}$ 이므로

$a-1=\log_2 a \quad \therefore a-\log_2 a=1$

따라서 점 P 에서 직선 $y=x$ 까지의 거리는

$$\frac{|a-\log_2 a|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. [출제의도] 등차수열의 일반항을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1+a_2) : (a_3+a_4)$

$=(a_1+a_1+d) : (a_1+2d+a_1+3d)=1 : 2$에서

$2a_1+5d=4a_1+2d \qquad \therefore 2a_1=3d$

$\therefore a_1 : a_4 = a_1 : (a_1+3d) = a_1 : 3a_1 = 1 : 3$

7. [출제의도] 행렬의 정의를 이해하고 행렬의 거듭제곱을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(1)=2,\ f(2)=1$ 이므로 $a_{12}=a_{21}=1,\ a_{11}=a_{22}=0$

따라서 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{2006}=(A^2)^{1003}=E^{1003}=E$

8. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

서로 악수를 나누지 않은 사람들끼리 모으면 대표 2명, 부대표 3명, 나머지 4명의 세 그룹으로 나누어진다. 따라서 구하는 확률은 이 세 그룹에서 한 명씩 택할 확률과 같다. $\therefore \frac{2\times 3\times 4}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{2}{7}$

9. [출제의도] 로그의 대소관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $1<a<b$에서 $0<\log a<\log b$이다.

$\log_b a=\frac{\log a}{\log b}<\frac{\log b}{\log a}=\log_a b$ (참)

ㄴ. (반례) $a=10,\ b=100$일 때

$10<100$이지만 $\frac{1}{10}\log 10>\frac{1}{100}\log 100$ (거짓)

ㄷ .

$2\log(a+b)<\log 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow \log(a+b)^2<\log 2(a^2+b^2)$

$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2>0\ (\because a<b)$

$(a+b)^2<2(a^2+b^2)$

$\therefore 2\log(a+b)<\log 2(a^2+b^2)$ (참)

10, [출제의도] 행렬을 추론하여 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}, \cdots, A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

이므로 $a_n=2^n,\ b_n=3^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2b_n}{2a_n+3b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-2\cdot 3^n}{2\cdot 2^n+3\cdot 3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}=-\frac{2}{3}$$

11. [출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $A=3E,\ B=O$일 때,

$A+B=3E,\ AB=4B$이지만 $A\neq 4E$ (거짓)

ㄴ. $A+B=3E$이고 $AB=4B$이므로

$(A+B)B=3EB,\ AB+B^2=3B,\ 4B+B^2=3B$

$\therefore B^2+B=O$ (참)

ㄷ. $A+B=3E$에서 $B=3E-A$

$AB=A(3E-A)=3A-A^2=(3E-A)A=BA$

$\therefore A^2-B^2=(A+B)(A-B)=3E(A-B)=3(A-B)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\boxed{(\text{가})}$: (좌변) $=H_{2^0}=H_1=1$

$\boxed{(\text{나})}$: $H_{2^{k+1}}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)$

$=H_{2^k}+\sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l}$

$\boxed{(\text{다})}$: $\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$ 에서 항수는 2^k개 이고,

각 항은 $\frac{1}{2^{k+1}}$ 보다 크거나 같으므로

$$\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}} \geqq 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}$$

13. [출제의도] 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선택한 두 집합 X, Y가 $X\subset Y$인 경우의 수는

i) $n(Y)=4$일 때, ${}_4\mathrm{C}_4\cdot(2^4-1)=15$

ii) $n(Y)=3$일 때, ${}_4\mathrm{C}_3\cdot(2^3-1)=28$

iii) $n(Y)=2$일 때, ${}_4\mathrm{C}_2\cdot(2^2-1)=18$

iv) $n(Y)=1$일 때, ${}_4\mathrm{C}_1\cdot(2-1)=4$

와 같이 $15+28+18+4=65$이고, A의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하는 경우의 수는 ${}_{16}\mathrm{C}_2=120$이다. 따라서 구하는 확률은 $\frac{65}{120}=\frac{13}{24}$

14. [출제의도] 등차중항을 이용하여 직선의 기울기를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 A 의 좌표를 $(-1,0)$이라 놓고 풀어도 일반성을 잃지 않는다. 직선 AB 의 기울기를 m이라 하면, 점 B 의 좌표는 $(0,\ m)$, 점 C 의 좌표는 $(m^2,\ 0)$, 점 D 의 좌표는 $(0,\ -m^3)$, 점 E 의 좌표는 $(-m^4, 0)$이다.

그런데 $\overline{\mathrm{AO}}, \overline{\mathrm{OC}}, \overline{\mathrm{EA}}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $2\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{AO}}+\overline{\mathrm{EA}}$ 즉, $2m^2=1+(m^4-1)$

따라서 $m^4=2m^2$에서 $m>0$이므로 $m=\sqrt{2}$

15. [출제의도] 주어진 규칙을 이해하여 극한값을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1=20\pi,\ S_n=\frac{1}{4}S_{n-1}+12\pi\ (n\geqq 2)$

$S_n-16\pi=\frac{1}{4}(S_{n-1}-16\pi)$ 이므로

$S_n-16\pi=(20\pi-16\pi)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi$

$S_n=16\pi+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi \quad \therefore \lim_{n\to\infty}S_n=16\pi$

16. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

2006년도의 인구수를 P라 하면

$P=5\cdot 2^{\frac{2006-2001}{15}}=5\cdot 2^{\frac{5}{15}}=5\cdot 2^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$2P=5\cdot 2^{\frac{4}{3}}=5\cdot 2^{\frac{t-2001}{15}}$ 에서 $\frac{4}{3}=\frac{t-2001}{15}$

$\therefore t=2021$

17. [출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

자동차의 속력을 확률변수 X라고 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}(104,\ 8^2)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X>120)=\mathrm{P}\left(Z>\frac{120-104}{8}\right)=\mathrm{P}(Z>2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leqq Z\leqq 2)=0.5-0.48$

$=0.02=\frac{1}{50}$

따라서 자동차 A, B가 모두 과속으로 단속될 확률은

$\frac{1}{50}\times\frac{1}{50}=\frac{1}{2500}$

18. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{1}{\log_3 2}+\frac{1}{\log_5 2}+\frac{1}{\log_6 2}=\log_2 3+\log_2 5+\log_2 6$

$=\log_2(3\cdot 5\cdot 6)$

$=\log_2 90=\frac{1}{\log_{90} 2}$

$\therefore k=90$

19. [출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

7의 개수에 따라 나누어 생각하면

(i) 7이 두 개인 경우 : ∨ □ ∨ □ ∨ □ ∨의 꼴에서 □의 자리에 1, 2, 3, 5, 9중 세 개를 넣고, 나머지 ∨의 자리에 2개의 7을 배열하는 방법과 같으므로 ${}_5\mathrm{P}_3\times{}_4\mathrm{C}_2=60\times 6=360$(개)

(ii) 7이 세 개인 경우 : 7 □ 7 □ 7의 꼴에서 □의 자리에 1, 2, 3, 5, 9중에서 두 개의 수를 배열하는 방법과 같으므로 ${}_5\mathrm{P}_2=20$(개) 이다.

따라서 구하는 다섯 자리 자연수의 개수는

$20+360=380$(개)

20. [출제의도] 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

네 팀이 짝지어서 경기를 치르게 되는 경우는 (A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)의 6(가지)

(i) 전승팀이 존재할 확률 :

A가 전승팀이 될 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{8}$ 이고, 네팀이므로 전승팀이 존재할 확률은 $\frac{1}{8}\times4=\frac{1}{2}$

(ii) 전패팀이 존재할 확률 : $\frac{1}{2}$

(iii) (전승,전패)가 동시에 존재할 확률 :

(A,B)가 (전승,전패)일 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{32}$ 이므로 (전승,전패)가 동시에 존재할 확률은 $\frac{1}{32}\times{}_4C_2\times2=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$\therefore m+n=8+5=13$

21. [출제의도] 이차방정식과 역행렬의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이차방정식 $x^2-6x+2=0$의 두 실근을 α, β라 하면, $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=2$

$A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix}$의 역행렬은

$A^{-1}=\frac{1}{\alpha\beta-1}\begin{pmatrix}\beta & -1\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & -1\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}$

이므로

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=\begin{pmatrix}\beta & -1\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & -1\\ -1 & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta^2+1 & -\beta-\alpha\\ -\beta-\alpha & \alpha^2+1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $(A^2)^{-1}$ 의 모든 성분의 합은

$\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$

$=6^2-2\cdot2-2\cdot6+2=22$

22. [출제의도] 수열의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{50}=a_{25}+1=(a_{13}+1)+1=a_{13}+2=(a_7+1)+2$

$=a_7+3=(a_4+1)+3=a_4+4=(a_2+1)+4$

$=a_2+5=(a_1+1)+5=16$

[참고] $a_1=10$, $a_2=11$, $a_{2n-1}=a_{2n}=a_n+1$ $(n\geq2)$

23. [출제의도] 로그방정식에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3x=X$, $\log_3y=Y$라 하면

$(\log_3x)^2+(\log_3y)^2=2\log_9x+2\log_9y=\log_3x+\log_3y$ 는

$X^2+Y^2=X+Y$, $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(Y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ⋯㉠

$\log_3xy=\log_3x+\log_3y=X+Y$ 에서 직선

$X+Y-\log_3xy=0$과 ㉠이 만나야 하므로

$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\log_3xy\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|1-\log_3xy|\leq1$

$\therefore 0\leq\log_3xy\leq2$

$\therefore 1\leq xy\leq9$ $\quad\therefore M+m=9+1=10$

24. [출제의도] 수열의 규칙을 찾아 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 제n 행에 있는 항의 수는 n 개이고 $1+2+3+\cdots+10+11=66$이므로 제66항은 제11행의 끝항이다. 각 행에 있는 첫째항은 1, 3, 9, 19, 33, ⋯ 이므로 제n 행의 첫째항은

$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)=1+\frac{4n(n-1)}{2}-2(n-1)$

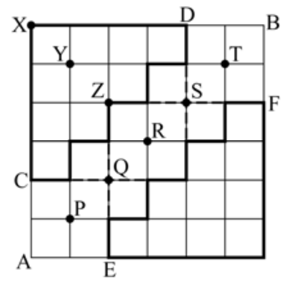
$=2n^2-4n+3$

따라서 제11행의 첫째항은 $2\times11^2-4\times11+3=201$이고 각 행은 공차가 4인 등차수열이므로 제66항은

$201+10\times4=241$

25. [출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

다음 그림에서 C에서 D까지 최단거리의 경로의 수는



i) A→C→X→D→B : 1

ii) A→C→Y→D→B : $1\times\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}\times1=16$

iii) A→C→Z→D→B : $1\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\times1=25$

이므로 $1+16+25=42$(가지)

마찬가지로 E에서 F까지 최단거리의 경로의 수도 42(가지)이다.

따라서 구하는 최단거리의 경로의 수는

$42+42=84$(가지)

26. [출제의도] 로그가 정의되는 조건을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

로그의 정의에서 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. 밑의 조건: $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$

진수의 조건: $a^2+1\geq1$

따라서 항상 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. (반례)$a=0$일 때 밑은 $2|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. (반례)$a=1$일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 항상 로그를 정의할 수 있는 것은 ㄱ뿐이다.

27. [출제의도] 지수방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2^x=t\,(t>0)$, $g(t)=t^2-2at+a^2-a-6$이라 하자. 방정식 $4^x-a\cdot2^{x+1}+a^2-a-6=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, 방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

방정식 $g(t)=0$의 서로 다른 두 양의 실근을 α, β 라 하면, $\alpha>0$, $\beta>0$ 이므로

$D/4=a^2-(a^2-a-6)=a+6>0$에서 $a>-6$ ⋯㉠

$\alpha+\beta=2a>0$ 에서 $a>0$ ⋯㉡

$\alpha\beta=a^2-a-6=(a-3)(a+2)>0$에서

$a>3$, $a<-2$ ⋯㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 구하는 범위는 $a>3$

28. [출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꺼낸 세 개의 전구 중에서 두 개가 노란 전구일 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$

이 때, A에서 꺼낸 전구가 노란 전구일 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{12}{72}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

29. [출제의도] 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{OA}_n}=a_n$ 이라 하면 $a_n=\pi\cdot\frac{a_{n+1}}{2}$ 에서

$a_{n+1}=\frac{2}{\pi}a_n$이므로

$a_n=a_1\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(6\pi-12)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \widehat{\mathrm{OA}_n}=\pi\cdot\frac{a_n}{2}=\frac{\pi}{2}(6\pi-12)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 값은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}(6\pi-12)$, 공비가 $\frac{2}{\pi}$인 무한등비급수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\mathrm{OA}_n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{6\pi-12}{1-\frac{2}{\pi}}=3\pi^2$

30. [출제의도] 확률변수의 표준편차를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$c\sum_{k=1}^{n}k=1$에서 $c=\frac{2}{n(n+1)}$

X의 표준편차가 $\sqrt{6}$이므로 X의 분산 $V(X)$는

$V(X)=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot(ck)-\left(\sum_{k=1}^{n}k\cdot ck\right)^2=6$에서

$c\sum_{k=1}^{n}k^3-\left(\sum_{k=1}^{n}ck^2\right)^2=6$

위 식에 $c=\frac{2}{n(n+1)}$를 대입하여 정리하면

$\frac{2}{n(n+1)}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}^2=6$

$\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(2n+1)^2}{9}=6$, $n^2+n-110=0$

$(n+11)(n-10)=0$ $\quad\therefore n=10$

수리'나'형 정답

1	④	2	⑤	3	④	4	①	5	④
6	②	7	③	8	⑤	9	①	10	②
11	④	12	②	13	③	14	①	15	③
16	③	17	⑤	18	90	19	102	20	20
21	22	22	16	23	100	24	241	25	375
26	①	27	⑤	28	②	29	⑤	30	150

해 설

1. '가'형과 동일

2. [출제의도] 합의 기호를 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-2\sum_{k=1}^{10}(k+2)+\sum_{k=1}^{10}3$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^2-2(k+2)+3\}$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$

3. [출제의도] 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)-n^2}{(n+1)(n+2)-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+7n+12)-n^2}{(n^2+3n+2)-n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+12}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{12}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{7}{3}$

4. '가'형과 동일

5. [출제의도] 지수법칙을 이해하고 적용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}}=(2^{-8})^{\frac{1}{n}}=2^{-\frac{8}{n}}$에서 $2^{-\frac{8}{n}}$이 자연수이려면

$n=-1$, -2, -4, -8이어야 하고, 이 때 $2^{-\frac{8}{n}}$의 값은 각각 256, 16, 4, 2이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 4이다.

6 ~ 7. '가'형과 동일

8. [출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A^4=O$의 양변에 $-E$를 더하면 $A^4-E=-E$이므로

$E-A^4=E$

$E-A^4=(E-A)(E+A)(E+A^2)=E$이므로

$(E-A)^{-1}=(E+A)(E+A^2)$,

$(E+A)^{-1}=(E-A)(E+A^2)$,

$(E+A^2)^{-1}=(E-A)(E+A)=E-A^2$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 역행렬이 존재한다.

9. [출제의도] 논리적 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

네 사람은 수리영역 문항을 각각 1문항씩 풀어야 하며, C가 언어영역을 풀었다고 할 때, 네 사람이 푼 문항을 표로 나타내면 다음과 같다.

	언어	수리	외국어	사탐	계
A	○	○	☆		3
B		○	○		3
C	○	○		○	3
D		○	○		3
계	3	4	3	2	12

B와 D는 언어영역 문항을 풀 수도 있고 사회탐구영역 문항을 풀 수도 있다.

따라서 'A는 외국어영역 문항을 풀었다.'가 참이다.

10 ~ 12. '가'형과 동일

13. [출제의도] 로그와 행렬에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^{-1}BA=B$ 에서 $A(A^{-1}BA)=AB$ 이므로

$BA=AB$

$BA=\begin{pmatrix}\log x & \log y\\ 0 & \log z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 1 & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\log x+\log y & y\log x+z\log y\\ \log z & z\log z\end{pmatrix}$

$AB=\begin{pmatrix}x & y\\ 1 & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log x & \log y\\ 0 & \log z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\log x & x\log y+y\log z\\ \log x & \log y+z\log z\end{pmatrix}$

$BA=AB$ 에서 $\log y=0$, $\log x=\log z$

$\therefore y=1$, $x=z$

한편, A^{-1} 가 존재하므로 $x\neq 1$

따라서 조건을 만족하는 행렬 A는

$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4&1\\1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}$ 의 4개이다.

14 ~ 16. '가'형과 동일

17. [출제의도] 행렬을 이용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

<표1>을 행렬로 나타내면

$A=\begin{pmatrix}30000 & 10000\\ 20000 & 20000\end{pmatrix}=10000\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

이고, <표2>를 행렬로 나타내면 $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$이다.

그러므로 갑과 을이 P약국과 Q약국에서 1개월간 구입한 약값은 $AB=10000\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}=10000\begin{pmatrix}4&9\\4&10\end{pmatrix}$이다.

따라서 $10000\begin{pmatrix}4&9\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}600000\\640000\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}4&9\\4&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\64\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}10&-9\\-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}60\\64\end{pmatrix}$

$\therefore a=10$, $b=4$

$\therefore a+b=10+4=14$

18. '가'형과 동일

19. [출제의도] 넓이에 관한 수학적 기초 지식을 묻는 문제이다.

다음 그림과 같이 직사각형에서 가로, 세로의 길이를 l, m, n, x, y라 하면, $lx=8$, $nx=9$, $my=6$

	l	m	n
x	8	a	9
y	b	6	c

$\therefore a(b+c)=mx(ly+ny)=(lx)(my)+(nx)(my)$

$=8\cdot 6+9\cdot 6=102$

20. [출제의도] 주사위의 눈에 관한 수학적 기초 지식을 묻는 문제이다.

윗 면의 눈의 수가 1, 6 일 때, 옆 면의 눈의 수는 각각 다음과 같다.

	2					2	
4	$\boxed{1}$	3			3	$\boxed{6}$	4
	5					5	

따라서 이웃한 주사위와 접한 네 개의 면에 있는 수의 합은 $5+4+5+6=20$

21 ~ 22. '가'형과 동일

23. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x=f(x)+g(x)$ 이므로

$\log a=f(a)+g(a)$ $\cdots$ ㉠, $\log b=f(b)+g(b)$ $\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡에서

$\log a-\log b=f(a)-f(b)+g(a)-g(b)=2-\log 3$

이므로 $\log\frac{a}{b}=\log\frac{100}{3}$, $\frac{a}{b}=\frac{100}{3}$

$\therefore 3a=100b$

산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$3a+\frac{25}{b}=100b+\frac{25}{b}\geq 2\sqrt{100b\times\frac{25}{b}}=100$이고, 등호는 $a=\frac{50}{3}$, $b=\frac{1}{2}$일 때 성립한다.

따라서 구하는 최소값은 100

24. '가'형과 동일

25. [출제의도] 등차수열을 이용하여 실생활에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선미가 매일 푸는 문제수는 공차가 d인 등차수열이므로

$x=15+(15+d)+(15+2d)+\cdots+(15+8d)+24$

$=30+(30+d)+(30+2d)+\cdots+(30+6d)+39$

즉, $\frac{9(15+15+8d)}{2}+24=\frac{7(30+30+6d)}{2}+39$

$9(15+4d)+24=7(30+3d)+39$에서

$15d=90$ $\therefore d=6$

따라서 수학 책의 문제수는

$x=9(15+4d)+24=9(15+4\cdot 6)+24=375$

26. '가'형과 동일

27. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

공비를 r라 하면 $a+b+c=a+ar+ar^2=\frac{7}{2}$에서

$a(1+r+r^2)=\frac{7}{2}$ $\cdots$ ㉠

또, $abc=a\cdot ar\cdot ar^2=1$에서 $a^3r^3=(ar)^3=1$이고

a, r는 실수이므로 $ar=1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2}$, $2r^2+2r+2=7r$, $2r^2-5r+2=0$

$(r-2)(2r-1)=0$ $\therefore r=2$ 또는 $r=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 세 수는 $2, 1, \frac{1}{2}$이다.

$\therefore a^2+b^2+c^2=2^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$

[다른 풀이] $b^2=ac$이므로 (나)에서 $b^3=1$ $\therefore b=1$

$b=1$이므로 $ac=1$이고, (가)에서 $a+c=\frac{5}{2}$ 이므로

$ab+bc=\frac{5}{2}$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\frac{21}{4}$

28. [출제의도] 수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n+1$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)+2\lim_{n\to\infty}b_n=0+2=2$ (참)

ㄷ. (반례) $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n$, $c_n=n+\frac{1}{n}$이라 하면

$a_n<b_n<c_n$이고, $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

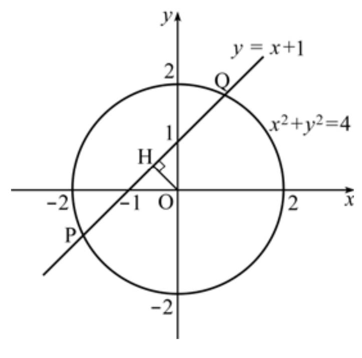
29. [출제의도] 행렬과 두 점 사이의 거리에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 등식에서

$\begin{pmatrix}4(x^2+y^2)-(x-y) & x^2+y^2\\ x^2+y^2 & -(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 4\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ 이므로

$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x-y=-1\end{cases}$

이를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{OP}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{14}$

30. [출제의도] 수열의 합에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꼭지점 C에서 변AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=25$이므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\frac{15\times 20}{25}=12$

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{15^2-12^2}=9$ 이고 P_9, Q_9가 각각 H, C와 일치하므로 $\overline{\mathrm{P_9Q_9}}=\overline{\mathrm{CH}}=12$

삼각형AHC에서

$\overline{\mathrm{P_1Q_1}}+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}+\overline{\mathrm{P_3Q_3}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_9Q_9}}=(1+2+3+\cdots+9)\tan A$

$=\frac{4}{3}\times\frac{9\times 10}{2}=60$

또, 삼각형BHC에서

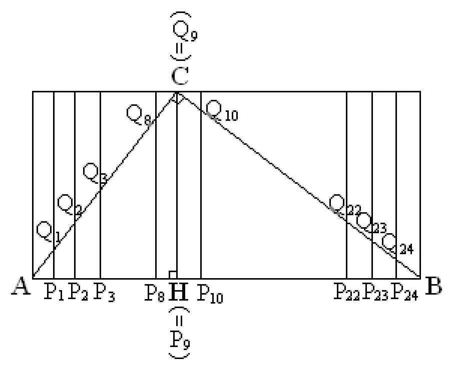
$\overline{\mathrm{P_{10}Q_{10}}}+\overline{\mathrm{P_{11}Q_{11}}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_{24}Q_{24}}}=(15+14+13+\cdots+2+1)\tan B$

$=\frac{3}{4}\times\frac{15\times 16}{2}=90$

따라서

$\overline{\mathrm{P_1Q_1}}+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}+\overline{\mathrm{P_3Q_3}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_{24}Q_{24}}}=60+90=150$

[다른 풀이] 다음 그림에서



$(\overline{\mathrm{P_1Q_1}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_8Q_8}})+\overline{\mathrm{P_9Q_9}}+(\overline{\mathrm{P_{10}Q_{10}}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_{24}Q_{24}}})$

$=\frac{1}{2}\times 12\times 8+12+\frac{1}{2}\times 12\times 15=150$