2006학년도 9월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

수리“가”형 정답

1	⑤	2	④	3	⑤	4	③	5	①	6	④
7	②	8	①	9	②	10	①	11	③	12	①
13	③	14	④	15	③	16	②	17	④	18	⑤
19	②	20	②	21	⑤	22	81	23	11	24	216
25	40	26	10	27	13	28	2	29	12	30	32

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$8^{\frac{x}{2}}=(2^3)^{\frac{x}{2}}=(2^x)^{\frac{3}{2}}=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈과 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$이므로

$(A+B)C=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 무한등비수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot4^n-2^n}{4^n+3\cdot3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$=\dfrac{4-0}{1+3\cdot0}=4$

4. [출제의도] 등차수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수열의 항의 개수를 n이라 하면 공차가 $\frac{1}{7}$인

등차수열이므로 $30+(n-1)\frac{1}{7}=50$ $\therefore n=141$

따라서 이 수열의 합은 $\dfrac{141(30+50)}{2}=5640$

5. [출제의도] 연립일차방정식이 해를 갖지 않을 조건을 역행렬을 이용하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2-k&1\\3&4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$이 해를 갖지 않으려면

$(2-k)(4-k)-3=0$, $k=1$ 또는 $k=5$

$k=1$일 때에는 무수히 많은 해를 갖고 $k=5$일 때는 해를 갖지 않는다.

6. [출제의도] 실생활과 관련된 문제를 행렬로 표현할 수 있는가를 묻는 문제이다.

1번 버스가 정차하는 정류장은 S_2, S_3이므로

$a_{11}=0$, $a_{12}=1$, $a_{13}=1$이고, 2번 버스가 정차하는 정류장은 S_1, S_2이므로 $a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$이고, 3번 버스가 정차하는 정류장은 S_1, S_2, S_3이므로 $a_{31}=1$, $a_{32}=1$, $a_{33}=1$이다.

따라서 행렬 A는 $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$이다.

7. [출제의도] 등비수열의 합과 일반항의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{a_{10}-a_9}{S_{10}-S_8}+\frac{S_5-S_3}{a_5-a_4}=\frac{a_{10}-a_9}{a_{10}+a_9}+\frac{a_5+a_4}{a_5-a_4}$$

$$=\frac{\frac{a_{10}}{a_9}-1}{\frac{a_{10}}{a_9}+1}+\frac{\frac{a_5}{a_4}+1}{\frac{a_5}{a_4}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}{2}=4$$

8. [출제의도] 등비수열의 관계식과 무한등비급수의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열$\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

(나)에서 $\dfrac{a}{1-r}=2(a+ar)$이고 $a\neq0$이므로

$\dfrac{1}{1-r}=2(1+r)$, $1-r^2=\dfrac{1}{2}$ $\therefore r^2=\dfrac{1}{2}$

(다)에서 $\dfrac{a^2}{1-r^2}=2(a+ar^2)$이고 $r^2=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{a^2}{1-\frac{1}{2}}=2\left(a+\frac{1}{2}a\right)$, $2a^2=3a$ $\therefore a=\dfrac{3}{2}$

따라서 $a_5=ar^4=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

9. [출제의도] 규칙을 갖는 수들의 합을 $\sum$를 이용하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

오른쪽 표에서 k번째 행의 수들의 합은

$k+2k+\cdots+9k$

$=k(1+2+\cdots+9)=45k$

이므로 곱셈표 전체의 수들의 총합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}45k=45\sum_{k=1}^{9}k=45^2$이다.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

곱셈표는 오른쪽 아래로 향하는 대각선을 중심으로 대칭이고 대각선에 있는 수들의 총합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}k^2=\frac{9\times10\times19}{6}=285$이고 대각선 아래의 어두운 부분에 있는 수들의 총합은 $\frac{1}{2}(45^2-285)=870$이다.

따라서 어두운 부분에 있는 수들의 총합은

$870+285=1155$이다.

(다른 풀이) 어두운 부분의 제 k번째 행에 있는 수들의 합은 $k(1+2+\cdots+k)=\dfrac{k^3+k^2}{2}$

따라서 구하는 합은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{k^3+k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}(k^3+k^2)=1155$

10. [출제의도] 상용로그의 가수의 조건을 좌표평면에 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

양수 m,n은 정수 부분이 각각 세 자리이고

상용로그의 가수가 각각 x,y이므로,

$\log m=2+x$, $\log n=2+y$ $\cdots$㉠,

$0\leq x<1$, $0\leq y<1$ $\cdots$㉡

또, mn의 정수부분이 다섯 자리이므로

$4\leq\log mn<5$

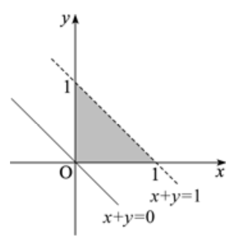
$\therefore$ $4\leq\log m+\log n<5\cdots$㉢

㉠을 ㉢에 대입하면

$0\leq x+y<1$

따라서 점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역은 그림과 같다.

(단, 점선 부분은 제외한다.)



11. [출제의도] 행렬에 의해 정의된 점을 좌표평면에 나타낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix}-1&2\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}-p+2q\\4p-3q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$이므로 $p=q$이다.

따라서 행렬 A의 고정점 $(p,\ q)$가 나타내는 도형은 직선 $y=x$이다. 보기에서 직선 $y=x$와 만나지 않는 것은 ③이다.

12. [출제의도] 등차수열의 일반항과 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이 볼록다각형의 꼭지점의 수를 n이라 하면

이 볼록다각형의 내각의 크기($^\circ$)는

63, $63+18$, $\cdots$, $63+18(n-1)$이고, 이들의 합은

$\dfrac{n\{2\times63+18(n-1)\}}{2}=n\{63+9(n-1)\}$

한편, 볼록n각형의 내각의 총합은 $(n-2)\times180^\circ$이므로

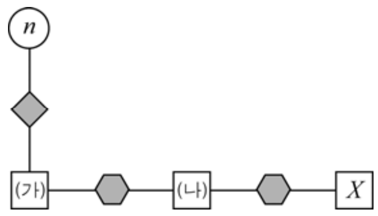
$180(n-2)=n\{63+9(n-1)\}$, $n=4$ 또는 $n=10$

$n=10$일 때, 최대각의 크기는 $63^\circ+9\times18^\circ>180^\circ$

이것은 볼록다각형이라는 사실에 모순이다.

따라서 $n=4$일 때, 최대각은 $63^\circ+3\times18^\circ=117^\circ$

13. [출제의도] 수와 행렬, 행렬과 행렬의 관계의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.



위 그림에서 $n=100a+10b+c$라 하면

[그림1]에 의해 (가)에 들어갈 행렬은$\begin{pmatrix}a&b\\c&b+c\end{pmatrix}$이다.

[그림2]에 의해 (나)에 들어갈 행렬은$\begin{pmatrix}a&c\\b&b+c\end{pmatrix}$이고

행렬 $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&b+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&1\\9&10\end{pmatrix}$이므로

$a=7$, $b=1$, $c=9$

$\therefore$ $n=719$

14. [출제의도] 이차정사각행렬에서 성립하는 등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

행렬 $\hat{A}$를 $\hat{A}=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ 라 하면

$A+\hat{A}=\begin{pmatrix}a+d&0\\0&a+d\end{pmatrix}=\boxed{(a+d)E}\cdots$㉠

$A\hat{A}=\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\boxed{(ad-bc)E}\cdots$㉡

㉠의 양변에 A를 곱하여 정리하면

$A(A+\hat{A})=(a+d)A$

$A^2+\boxed{A\hat{A}-(a+d)A}=O$

이 식에 ㉡을 대입하면

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$이다.

15. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (참)$\log80=\log10+\log8=1+3\log2$ 에서

$f(80)=1, g(80)=3\log2$

$\therefore$ $f(80)-1=g(80)-3\log2$

ㄴ. (거짓)$\log a=f(a)+g(a)$, $\log a^2=2f(a)+2g(a)$

그런데 $f(a^2)=2f(a)$이므로 $0\leq 2g(a)<1$

$\therefore 0\leq g(a)<\dfrac{1}{2}$

$\log a^3=3f(a)+3g(a)$에서 $0\leq3g(a)<\dfrac{3}{2}$이고

$1\leq3g(a)<\dfrac{3}{2}$일 때는 $f(a^3)=3f(a)+1$이다.

ㄷ. (참)$\log a^2=2f(a)+2g(a)$에서

$0\leq g(a)<1$이므로 $0\leq2g(a)<2$

ⅰ) $0\leq2g(a)<1$일 때 $g(a)=2g(a)$ $\therefore g(a)=0$

ⅱ) $1\leq2g(a)<2$일 때

$g(a^2)=2g(a)-1=g(a)$

$g(a)=1$이므로 모순이다.

ⅰ)과 ⅱ)에 의해 $g(a)=0$

$\log a^n=n\log a=nf(a)+ng(a)$에서 $ng(a)=0$이고

$nf(a)$는 정수이므로 $g(a^n)=0$이다.

16. **[출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식이 자연수임을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

(ⅰ) $n=1$일 때

$$\frac{1^3}{6}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{3}=1$$

(ⅱ) $n=k\ (k\geq 1)$일 때

$\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$가 자연수라고 가정하자.

$\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$

$=\left(\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}\right)+\left(\frac{3k^2+3k+1}{6}+\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{3}\right)$에서 $\boxed{\quad\quad}$

$\frac{3k^2+3k+1}{6}+\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{3}=$

$\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

이때 $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$는 자연수이고

$(k+1)(k+2)$는 연속된 자연수의 곱이므로 $\boxed{2}$의 배수이다.

그러므로 $\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$은 자연수이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$은 자연수이다.

17. **[출제의도] 역행렬을 갖기 위한 조건을 묻는 문제이다.**

등식 $x^2+y^2=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x & y-2 \\ 1 & m \end{pmatrix}$이 역행렬을 가지려면

$mx-(y-2)\neq 0$이므로

모든 x에 대하여 $x^2+(mx+2)^2-1\neq 0$이어야 한다.

따라서 $(m^2+1)x^2+4mx+3=0$을 만족하는 실근이 존재하지 않으므로

$\frac{D}{4}=4m^2-3(m^2+1)<0$

$\therefore\ -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

18. **[출제의도] 상용로그의 지표와 자리수의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. (거짓) $\frac{b^2}{a}$은 정수부분이 여섯 자리이므로

$5\leq \log\frac{b^2}{a}<6$이다.

따라서 $\alpha=\log\frac{b^2}{a}-5$, $\log\frac{b^2}{a}=\alpha+5$

$\therefore\ 10^{\alpha+5}=\frac{b^2}{a}$

ㄴ. (참) $\frac{a^2}{b}$은 소수 셋째 자리에서 처음으로 0아닌 숫자가 나타나므로 $-3\leq\log\frac{a^2}{b}<-2$이다.

$\therefore\left[\log\frac{a^2}{b}\right]=-3$

ㄷ. (참) $5\leq 2\log b-\log a<6\cdots$㉠,

$-3\leq 2\log a-\log b<-2\cdots$㉡

㉠+㉡×2에서

$-1\leq 3\log a<2$, $-\frac{1}{3}\leq\log a<\frac{2}{3}$

그러므로 $\log a$의 지표는 -1또는 0이다.

그런데 a는 자연수이므로 a는 한 자리 자연수이다.

19. **[출제의도] 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

ㄱ. (거짓)(반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n^2$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$

ㄴ. (참) $a_n-b_n=c_n$이라 하면 $b_n=a_n-c_n$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-c_n)=5$

ㄷ. (거짓)(반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$

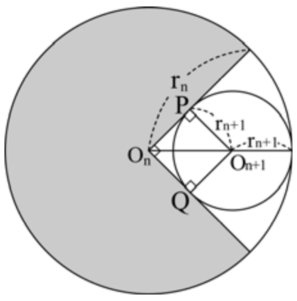
20. **[출제의도] 도형에서 규칙을 발견하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

원 O_n, O_{n+1}의 반지름을 각각 r_n, r_{n+1}이라 하면 그림에서 사각형 PO_nQO_{n+1}은 정사각형이므로

$\overline{O_nO_{n+1}}=r_n-r_{n+1}=\sqrt{2}r_{n+1}$에서

$r_{n+1}=(\sqrt{2}-1)r_n$이다.

따라서 부채꼴 A_n과 부채꼴 A_{n+1}은 닮은 도형이고 그 닮음비가 $1:(\sqrt{2}-1)$이므로



$\frac{S_{n+1}}{S_n}=(\sqrt{2}-1)^2$

$=3-2\sqrt{2}$이다.

또 $S_1=\frac{3}{4}\pi$이므로

S_1, S_2, S_3, $\cdots$는

첫째항이 $\frac{3}{4}\pi$, 공비가

$3-2\sqrt{2}$인 무한등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{(3\sqrt{2}+3)\pi}{8}$$

21. **[출제의도] 실생활과 관련된 상황을 수열과 관계지어 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

수열 $\{a_n\}$을 3296, 3284, 3264, 3236, 3200, $\cdots$이라 하면, 이 수열의 계차수열 $\{b_n\}$은

-12, -20, -28, -36, $\cdots$이므로

$b_n=-12+(n-1)(-8)=-8n-4$

따라서 $a_n=3296+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-8k-4)=-4n^2+3300$

$a_n=800$에서 $n^2=625$, $n>0$이므로 $n=25$

22. **[출제의도] 수열의 규칙성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

$w+1+1=1$에서 $w=-1$

$z+w+1=1$에서 $z=-w=1$

$y+z+w=1$에서 $y=1$

$x+y+z=w$에서 $x=-3$ $\therefore\ x^4=81$

23. **[출제의도] 무한급수가 수렴할 때 성립하는 성질을 이해하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)$가 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)=0$ $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-2}=\frac{\frac{5}{2}+3}{\frac{5}{2}-2}=11$$

24. **[출제의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.**

공비를 r라 하면 $B=12r$, $E=12r^2$, $96=12r^3$이므로 $r=2$이고 $B=24$, $E=48$이다.

또, B와 E는 각각 A와 C, D와 F의 등차중항이므로 $A+C=2B$, $D+F=2E$이다.

따라서 $A+B+C+D+E+F$

$=(A+C)+B+(D+F)+E$

$=2B+B+2E+E$

$=3(B+E)=3\times 72=216$

25. **[출제의도] 행렬의 거듭제곱의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$(A+E)^2=3A+2E$

$\therefore A^2=A+E$

$(A+E)^3=(A+E)^2(A+E)=(3A+2E)(A+E)$

$=3A^2+5A+2E$

$=3(A+E)+5A+2E$

$=8A+5E$ 이므로 $a=8$, $b=5$ $\therefore ab=40$

26. **[출제의도] 실생활과 관련된 상황을 상용로그와 관련지어 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

화면에 100이 나타나 있을 때 $\boxed{D(2^x)}$키를 한 번 누르면 $\log 2^{100}=100\log 2=30.1$이므로 2^{100}의 자리수 31이 화면에 나타난다.

다시 $\boxed{D(2^x)}$키를 한 번 누르면 $\log 2^{31}=31\log 2=9.331$이므로 2^{31}의 자리수 10이 화면에 나타난다.

27. **[출제의도] 무리수가 서로 같을 조건과 로그의 성질을 관련지어 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$\log 20=1+\log 2$,

$\frac{1}{\log_8 100}=\frac{\log 8}{\log 100}=\frac{3}{2}\frac{\log 2}{\log 10}=\frac{3}{2}\log 2$ 이므로

$a(1+\log 2)+\frac{3b}{2}\log 2+3=0$

$(a+3)+\left(a+\frac{3b}{2}\right)\log 2=0$

이때 $a+3$, $a+\frac{3b}{2}$는 유리수이고 $\log 2$가 무리수이므로

$a+3=0$, $a+\frac{3b}{2}=0$ $\therefore\ a=-3$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=13$

28. **[출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 극한값의 계산을 관련지어 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=-\sqrt{n}-1$, $\alpha_n\beta_n=-\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{3}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}-1}{-\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{3}{4}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4\sqrt{n}}}=\frac{1+0}{\frac{1}{2}+0}=2$$

29. **[출제의도] 부분합을 이용해서 무한급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$이고 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$na_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$에서 $n(S_{n+1}-S_n)=S_n$

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+1}{n}$의 양변의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 대입하여 변끼리 곱하면

$\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\frac{S_4}{S_3}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$

$\frac{S_n}{S_1}=n$ $\therefore\ S_n=nS_1=na_1=\frac{n}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=16\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=12$$

30. **[출제의도] 지수와 로그의 관계를 이용하여 실생활과 관련된 상황을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

현미경 A의 6단계에서의 확대비율은

$(2\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^6=2^9$

현미경 B의 7단계에서의 확대비율은 $4^7=2^{14}$

그런데 두 물체의 확대된 길이가 서로 같으므로

$x\times 2^9=y\times 2^{14}$

$\therefore\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{2^{14}}{2^{9}}=2^{5}=32$

수리“나”형 정답

1	⑤	*2*	④	*3*	②	*4*	①	*5*	①	*6*	④
7	②	*8*	④	*9*	②	*10*	①	*11*	③	*12*	③
13	③	*14*	④	*15*	③	*16*	①	*17*	④	*18*	⑤
19	⑤	*20*	②	*21*	⑤	*22*	243	*23*	81	*24*	8
25	40	*26*	10	*27*	13	*28*	16	*29*	20	*30*	32

해 설

1. 수리‘가’형 1번과 같음

2. 수리‘가’형 2번과 같음

3. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_2\dfrac{3}{4}+2\log_2\sqrt{6}-\log_2 9=\log_2\dfrac{3}{4}+\log_2 6-\log_2 9$

$=\log_2\left(\dfrac{3}{4}\times 6\div 9\right)=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$

4. [출제의도] 역행렬을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1=4$

한편 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta>0$

$\therefore \tan\theta=2$

따라서 구하는 역행렬은

$\begin{pmatrix}1 & \tan\theta\\ -\tan\theta & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

5. 수리‘가’형 5번과 같음

6. 수리‘가’형 6번과 같음

7. [출제의도] 로그의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

밑의 조건에서 $|x|>0,\ |x|\neq 1$

$\therefore\ x\neq 0,\ x\neq\pm 1$ … ㉠

진수 조건에서 $(x+3)(5-x)>0$

$\therefore -3<x<5$ … ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수는 $-2,\ 2,\ 3,\ 4$의 4개이다.

8. [출제의도] 주어진 행렬의 관계식에서 역행렬이 존재하지 않는다는 사실을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

행렬 A의 역행렬 A^{-1}이 존재한다고 하자.

$A^{2006}=O$의 양변에 A^{-1}을 계속 곱하면 $A=O$가 되는데 이것은 모순이다.

따라서 행렬A의 역행렬은 존재하지 않는다.

$\therefore -1-xy=0$에서 $y=-\dfrac{1}{x}$

9. [출제의도] 상용로그의 지표, 가수와 지수법칙을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log 25000=\log(2.5\times 10^4)=4+\log 2.5$

$\therefore m=4,\ \alpha=\log 2.5$

또한, $\log 0.025=\log(2.5\times 10^{-2})=-2+\log 2.5$

$\therefore n=-2,\ \beta=\log 2.5$

$\therefore\ \dfrac{m^{\alpha}}{(n^2)^{\beta}}=\dfrac{4^{\alpha}}{\{(-2)^2\}^{\beta}}=\dfrac{4^{\alpha}}{4^{\beta}}=1$

10. 수리‘가’형 10번과 같음

11. 수리‘가’형 11번과 같음

12. [출제의도] 거듭제곱근의 크기를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[4]{8}=8^{\frac{1}{4}},\ \sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$ 이므로

$(\sqrt[3]{4})^{12}=\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{12}=4^4=256$

$(\sqrt[4]{8})^{12}=\left(8^{\frac{1}{4}}\right)^{12}=8^3=512$

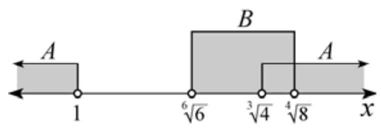
$(\sqrt[6]{6})^{12}=\left(6^{\frac{1}{6}}\right)^{12}=6^2=36$

$\therefore\ 1<\sqrt[6]{6}<\sqrt[3]{4}<\sqrt[4]{8}$

$(x-1)(x-\sqrt[3]{4})>0\quad\therefore\ x<1$ 또는 $x>\sqrt[3]{4}$

$(x-\sqrt[4]{8})(x-\sqrt[6]{6})<0\ \therefore\ \sqrt[6]{6}<x<\sqrt[4]{8}$

이 때, 각각의 해집합을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ A\cup B=\{x\,|\,x<1$ 또는 $x>\sqrt[6]{6}\}$

13. 수리‘가’형 13번과 같음

14. 수리‘가’형 14번과 같음

15. 수리‘가’형 15번과 같음

16. [출제의도] 지수와 로그의 관계를 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

log5를 유리수라고 가정하자.

$0<\log 5<1$이므로 서로소인 두 자연수 m, n에 대해

$\log 5=\dfrac{n}{m}\ (m>n)$로 놓을 수 있다.

$\log 5=\dfrac{n}{m}\ \Leftrightarrow\ 10^{\frac{n}{m}}=5$

양변을 m제곱하면 $5^m=10^n$

양변을 5^n으로 나누면 $5^{m-n}=2^n$

이때 $m-n>0$ 이므로 5^{m-n}은 홀수이고 2^n은 짝수가 되어 모순이다.

따라서 log5는 무리수이다.

17. 수리‘가’형 17번과 같음

18. 수리‘가’형 18번과 같음

19. [출제의도] 역행렬이 존재하지 않을 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (참)행렬 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(2,4)\in M$

ㄴ. (참)$(a,b)\in M$이면 행렬 $\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로 $b=2a$

이때 행렬 $\begin{pmatrix}1 & -a\\ 2 & -b\end{pmatrix}$에서 $-b-(-2a)=-b+2a=0$

이므로 역행렬이 존재하지 않는다.

따라서 $(-a,\ -b)\in M$

ㄷ. (참)$(a,b)\in M,\ (c,d)\in M$ 이면 $b=2a,\ d=2c$

이때 행렬 $\begin{pmatrix}1 & a+c\\ 2 & b+d\end{pmatrix}$에서

$(b+d)-2(a+c)=(b-2a)+(d-2c)=0$이므로

역행렬이 존재하지 않는다.

따라서 $(a+c,\ b+d)\in M$

20. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활과 관련된 상황을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{10}=10^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{10^2}=10^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{10^5}=10^{\frac{5}{6}}$

이므로 금속덩어리의 부피는 $10^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}=100$이다.

따라서 부피가 작은 덩어리의 부피는 25이므로

한 모서리의 길이는 $\sqrt[3]{25}$이다.

21. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 관계를 이용하여 실생활과 관련된 상황을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

지난달의 전체 회원의 수는 160명이므로

$x+y=160$ … ㉠

이번 달의 회원의 수가 모두 7명이 감소하였으므로

$0.05x-0.1y=-7$

$x-2y=-140$ … ㉡

연립방정식 ㉠, ㉡을 행렬로 나타내면

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160\\ -140\end{pmatrix}$

$a=1, b=-2$ 이므로 $a-b=3$

22. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_3 2006\times\log_{2006}N=\dfrac{\log 2006}{\log 3}\times\dfrac{\log N}{\log 2006}=\log_3 N$

이므로 $\log_3 N=5$에서 $N=3^5=243$

23. [출제의도] 지수법칙과 로그의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{3}<3^5$이므로 $\sqrt{3}\circ 3^5=\log_{\sqrt{3}}3^5=10$

또 $10>\log 81$ 이므로 $10\circ\log 81=10^{\log 81}=81$

24. [출제의도] 행렬의 성질과 행렬의 연산을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A+B=E$에서 $B=E-A$ 이므로

$A^2-B^2=A^2-(E-A)^2=2A-E=\begin{pmatrix}11 & 16\\ -4 & -7\end{pmatrix}$

$2A=\begin{pmatrix}12 & 16\\ -4 & -6\end{pmatrix}\ \therefore\ A=\begin{pmatrix}6 & 8\\ -2 & -3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A의 $(1,\ 2)$성분은 8이다.

25. 수리‘가’형 25번과 같음

26. 수리‘가’형 26번과 같음

27. 수리‘가’형 27번과 같음

28. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계와 행렬의 곱셈을 관련지어 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$ … ㉠

$AB=\begin{pmatrix}\alpha^2 & \beta\\ 0 & \alpha^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta^2 & \alpha\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2 & \alpha^3+\beta^3\\ 0 & \alpha^2\beta^2\end{pmatrix}$이고

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=14$ … ㉡

㉠, ㉡에 의해 $AB=\begin{pmatrix}1 & 14\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

따라서 AB의 모든 성분의 합은 16이다.

29. [출제의도] 이차함수의 그래프와 행렬의 대응을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이차함수 $f(x)=2(x-1)^2+2$의 그래프의 꼭지점의 좌표는 $(1,2)$이고 y절편은 4이므로 이에 대응하는 행렬F는 $F=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$이다.

$\therefore\ F^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}$

행렬 F^2은 이차함수 $g(x)$의 그래프에 대응되는 행렬이므로 꼭지점의 좌표는 $(5,10)$이고 y절편은 20임을 알 수 있다. 그리고 $g(0)$는 그래프의 y절편과 같으므로 $g(0)=20$이다.

30. 수리‘가’형 30번과 같음